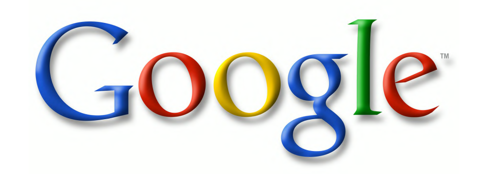
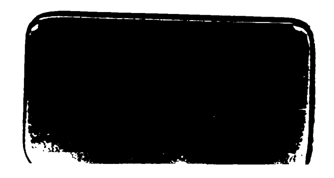


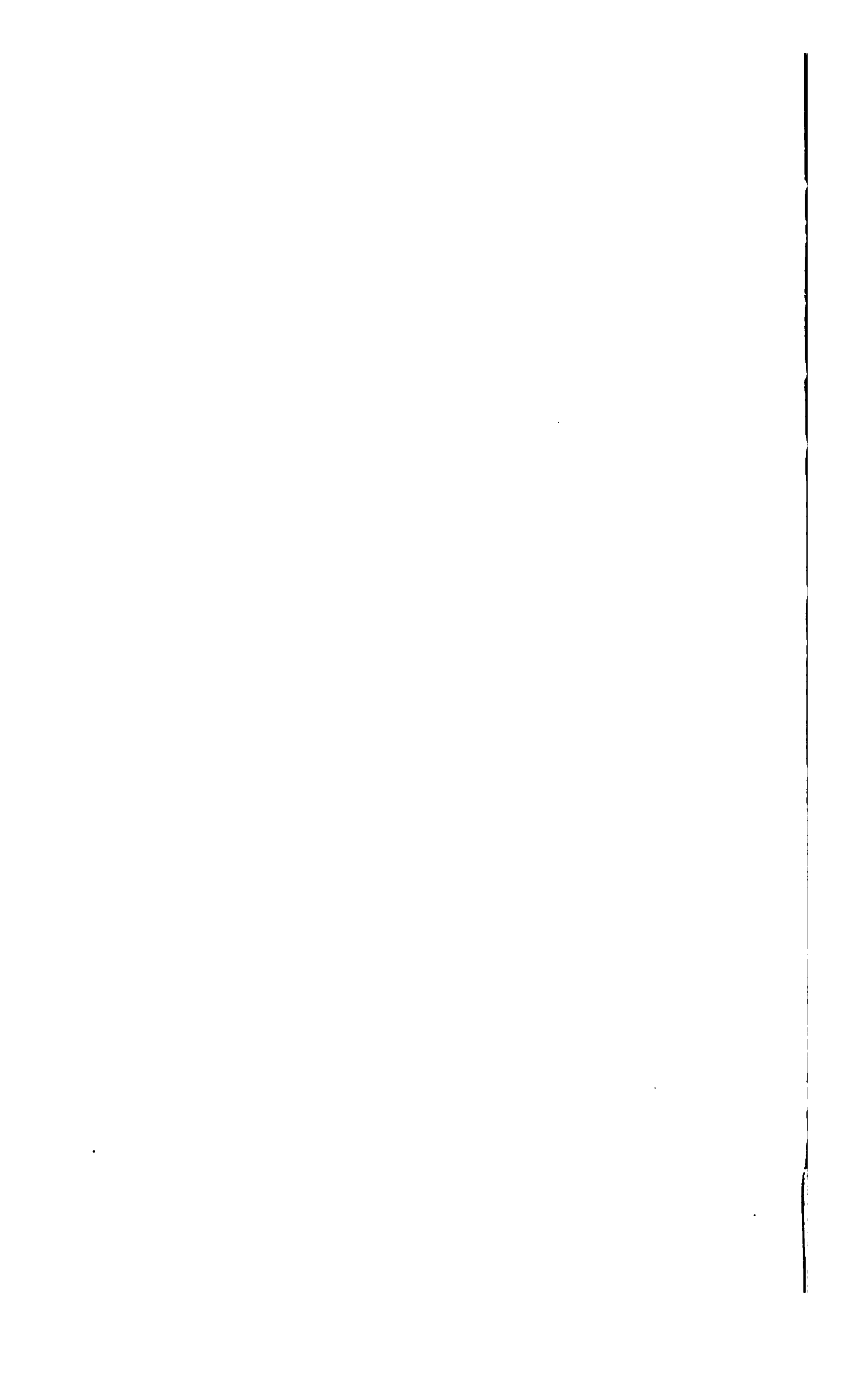












THEORIE UND ANWENDUNG

DER

LINIENCOORDINATEN

IN DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

VON

DR. KARL SCHWERING,

OBERLEHRER IN COESFELD.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND ZWEI FIGURENTAFELN.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1884.

Vorwort.

Das in der gegenwärtigen kleinen Schrift dem Vortrage zu Grunde liegende System von Liniencoordinaten ist derjenige Specialfall des allgemeinen trimetrischen Systems (vergl. Salmon-Fiedler, die Kegelschnitte, Art. 76), wo eine Ecke des Fundamentaldreiecks in das Unendliche verlegt ist. Eine weitere, sehr wichtige Specialisirung liegt in der Festsetzung, dass die Coordinatenwerthe von zwei Puncten aus gezählt werden sollen, welche eine senkrechte Gerade auf den beiden parallelen Axen bestimmt. Die Wichtigkeit dieser Bestimmung leuchtet ein, wenn man z. B. erwägt, dass durch dieselbe die Möglichkeit, die Ellipsengleichung in die Form $u \, . \, v =$ const. zu setzen, auf zwei bestimmte Lagen der Coordinatenaxen eingeschränkt wird. Diese Lagen werden daher vor andern Tangentenpaaren durch das System in ähnlicher Weise hervorgehoben, wie durch rechtwinklige Punctcoordinaten die Axen der Ellipse vor den übrigen Paaren conjugirter Diameter. In Fachkreisen ist das von mir zuerst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 21, S. 278, dann in einer Programmabhandlung des Briloner Gymnasiums behandelte Coordinatensystem nicht unbeachtet geblieben. Ausser mündlichen und schriftlichen Mittheilungen namhafter Mathematiker hebe ich hier insbesondere zwei mit grosser Sachkenntniss geschriebene Recensionen, die eine von Herrn Schlegel, Zeitschr. für Math. u. Phys. Bd. 24, S. 101, die andere von Herrn Günther, Darboux Bulletin Tome III. Nov. 1879, hervor. Herr Schlegel hat zudem in obiger Zeitschrift Bd. 23, S. 195

den Nachweis geliefert, dass das System in der That dem Cartesischen vollständig reciprok ist.

Zur Zusammenstellung und Bearbeitung des grossentheils seit einigen Jahren fertig liegenden Materials veranlassten mich Überlegungen und Bemerkungen nicht so sehr wissenschaftlicher als vielmehr didaktischer Natur. Die Darstellung der Liniencoordinaten erscheint in den gangbarsten Lehrbüchern der anatytischen Geometrie, wenn überhaupt, dann in einer zwiefachen Complication. Die Liniencoordinaten werden erstens aus den Punctcoordinaten abgeleitet, indem man in den Gleichungen der geraden Linie die Coefficienten statt der Coordinatenwerthe variabel macht, während es doch nicht allein möglich, sondern sehr einfach ist, die Liniencoordinaten aus diesem Abhängigkeitsverhältnisse zu erlösen. Diese Abhängigkeit ist um so drückender, als man dabei zunächst keine direct messbaren Strecken, sondern reciproke Werthe erhält, und daher das System nicht ein geometrisch erfasstes, sondern rechnerisch gewonnenes bleiben muss. Zu diesem einen Übelstande tritt der zweite, dass die gewonnene Theorie sofort auf trimetrische Systeme angewandt wird. Hier hat man nun freilich geometrisch anschaubare Grössen, nämlich die Entfernungen der drei Ecken des Fundamentaldreiecks von einer Geraden als Coordinaten derselben gewonnen, aber dieser Vortheil schwindet zum Theil wieder dadurch, dass ja nicht die Entfernungen selbst, sondern ihre Verhältnisse die eigentlichen variablen Grössen in der Gleichung eines Ortes sind. Trilineare Coordinaten an und für sich sind aber zweifellos nicht die einfachste Form, da es wohl Niemandem einfallen wird, einem Anfänger von ihnen ausgehend etwa die Cartesischen zu erklären.

Und für den Anfänger eben ist die vorliegende Zusammenstellung bestimmt. Darum auch hielt ich es für zweckmässig, etwa bis zum sechsten Abschnitte hin nur die allgemeinste Kenntniss der Punctcoordinaten und überhaupt diejenigen mathematischen Grundlagen vorauszusetzen, welche man an einem deutschen Gymnasium sich anzueignen Gelegenheit hat. Die

letzten Abschnitte sollen zeigen, dass das System sich auch bei höheren Curven und für solche Fragen bewährt, die man sonst nur mit Hülfe der Punctcoordinaten in den Lehrbüchern bearbeitet findet. Dabei bin ich grundsätzlich allgemeineren Untersuchungen, die mit der besonderen Natur unseres Systems in keinem Zusammenhange stehen, aus dem Wege gegangen, und habe auch hier möglichst wenig Specialwissen vorauszusetzen und immer an die allgemeinsten Grundlagen anzuknüpfen mich bemüht.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Von den Coordinaten. Definition.

1. Wenn ein Punct sich in der Ebene bewegt, so beschreibt er eine Linie. Der Punct erscheint also als Raumelement. Indess kann auch die Gerade als Raumelement aufgefasst werden. Denken wir uns an einen Kreis die sämmtlichen Tangenten gelegt, so werden durch jeden Punct der Ebene zwei dieser Tangenten gehen mit Ausnahme der Puncte im Innern des Kreises, welche von keiner solchen Geraden getroffen werden. So können wir also den Kreis als den geometrischen Ort aller Geraden definiren, welche von einem gewissen Puncte, dem Mittelpuncte, gleichen Abstand haben. Eine Zeichnung wird dies veranschaulichen. Man ziehe von einem Puncte P aus eine Anzahl, etwa 10 Gerade nach möglichst verschiedenen Richtungen, trage auf denselben von P aus gleiche Strecken ab und errichte im Endpuncte auf jeder derselben die Senkrechte, die man etwa mit rother Tinte gezeichnet denken möge. Alsdann wird sich bald von dem Gewirre der rothen, sich durchkreuzenden Linien um P herum ein weisser Fleck abheben, der deutlich die Kreisform hervortreten lässt. Siehe Figur 1 der angehängten Tafel.

2. Wie es nun Aufgabe einer auf Punctcoordinaten gestützten analytischen Geometrie ist, das Bewegungsgesetz des Punctes durch eine Gleichung auszudrücken, so ist es Aufgabe einer sich auf Liniencoordinaten stützenden Geometrie, das Bewegungsgesetz der Geraden durch eine Gleichung wiederzugeben.

3. Zu diesem Zwecke dient das folgende System. Man nehme in der Ebene zwei parallele Gerade an, die durch ein auf ihnen errichtetes Lot in den Punkten O und Q geschnitten werden. Die Strecke QO, die Entfernung der beiden Parallelen, nennen

wir e und definiren nun als Coordinaten der Geraden L, welche die Parallelen in den Puncten A und B schneidet, die in gleicher Richtung gemessenen Strecken OA und QB. Wir bezeichnen dieselben durch

$$u = OA \quad \text{und} \quad v = QB$$

und nennen die beiden Parallelen OA und QB mit Rücksicht darauf die U- und V-Axen. Die Richtung QO von der V-Axe zur U-Axe hin gilt als positiv. (Tafel, Fig. 2.)

Ist als positive Richtung der horizontal gedachten Axen die dem Beschauer rechts liegende festgesetzt, so kann man sofort die Aufgabe lösen: Man zeichne die Gerade, welche den Coordinaten $u = a$ und $v = b$ entspricht. Sie wird bezeichnet durch (a, b).

Zur Übung zeichne man die Geraden $(4, 5)$; $(-3, 2)$; $(5, -6)$; $(-4, 6)$; $(0, -3)$; $(0, 0)$.

4. Umgekehrt hat jede Gerade der Ebene zwei bestimmte Coordinaten. Dies ist unzweifelhaft für jede Gerade, welche die Axen schneidet. Dagegen bedürfen die den Axen parallelen Geraden einer besonderen Untersuchung. Wir greifen auf dem Mittellote OQ einen bestimmten Punct A heraus und ziehen durch ihn die Gerade, welche die Axen in den Puncten C und D treffen möge. Dann sind OC und QD die Coordinaten der Geraden ACD. Nun ist, wenn $AO = a$, $AQ = b$

$$a : b = u : v.$$

Wird nun die Gerade sich der parallelen Lage nähern, so wachsen die Coordinaten unbegrenzt, aber ihr Verhältniss ist ein festbestimmtes: das ihrer Abstände von den Axen. Ist dieses Verhältniss gleich -1, so haben wir die Mittellinie der Axen, ist es $+1$, so haben wir die unendlich ferne Gerade vor uns. Hat dies Verhältniss den Werth 0 oder ∞, so erhalten wir eine der beiden Axen.

5. Aufgabe. Man bestimme die Gleichung des Kreises. Zu diesem Zwecke nehmen wir zwei parallele Tangenten desselben als U- und V-Axe an. e ist also gleich $2r$. Verbinden wir nun die Schnittpuncte A, B der willkürlichen Tangente L mit dem Mittelpuncte C. (Tafel, Fig. 3.)

Es ist:

$$OA = u, \quad QB = v.$$

In den Winkel CAO schreiben wir α, so dürfen wir auch CAB ebenso α und die beiden gleichen Winkel bei B $90^0 - \alpha$ nennen. Daher ist das Dreieck ACB rechtwinklig, mithin, wenn der Berührungspunct von L durch D bezeichnet wird,

$$BD \,.\, DA = r^2,$$

also wegen $BD = QB$ und $DA = AO$

$$u \,.\, v = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.)$$

Dies ist die Gleichung des Kreises in Liniencoordinaten.

Ist v sehr klein, so ist u sehr gross. Nimmt v zu, so nimmt u ab, bis beide gleich r werden, und nun wächst v unbegrenzt, während u verschwindet. Beide Coordinaten haben gleichzeitig das positive oder das negative Vorzeichen.

Zweiter Abschnitt.

Gleichung eines Punctes.

6. Von dem gegebenen Puncte P aus fällen wir auf die Axen die senkrechte Gerade; Schnittpuncte mit denselben A, B. Sei $OA = a$, $QB = a$. Ferner legen wir durch P eine willkürliche Gerade, welche die Axen in C, D schneiden möge; sei $OC = u$, $QD = v$. Wenn wir nun noch einführen $BP = c$, also $AP = c - e$, so ist

$$\frac{v-a}{u-a} = \frac{c}{c-e}$$

oder:

$$(c - e)\, v - cu + ae = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

Zu jedem gegebenen Werthe von u gehört ein ganz bestimmter von v, welcher durch die Gleichung (1.), welche vom ersten Grade ist, ermittelt wird. Dieselbe ist die Gleichung des Punctes P.

7. Umgekehrt stellt die Gleichung:

$$Au + Bv + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2.)$$

einen Punct dar. Wir bestimmen zwei Werthepaare (u_1, v_1) und (u_2, v_2), welche derselben genügen. Dann ist also:

$$\left.\begin{array}{l} Au_1 + Bv_1 + C = 0 \\ Au_2 + Bv_2 + C = 0, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3.)$$

mithin durch Subtraction

$$A(u_1 - u_2) + B(v_1 - v_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)$$

Ziehen wir nun die beiden Geraden (u_1, v_1), (u_2, v_2), so schneiden sich dieselben in einem Puncte P. Jede fernere durch P gehende Gerade mit den Coordinaten (u, v) trifft nun die Axen derartig, dass man hat:

$$\frac{u - u_1}{v - v_1} = \frac{u - u_2}{v - v_2} = \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} = -\frac{B}{A}.$$

Demnach ist für die Gerade (u, v)

$$Au + Bv - Au_1 - Bv_1 = 0.$$

Und dies stimmt in der Form mit (1.) überein und geht in dieselbe über, sobald man aus (3.) den Werth für C einsetzt.

8. Wenn zwei Puncte durch die Gleichungen gegeben sind:

$$\left.\begin{array}{l} Au + Bv + C = 0 \\ Du + Ev + F = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.)$$

so kann man durch Auflösung nach u und v die Gerade bestimmen, welche beiden Puncten gemeinsam ist, d. h. welche durch beide Puncte geht.

9. Soll ein dritter Punct mit den Puncten (5.) in einer Geraden liegen, so muss die Gleichung dieses Punctes von selbst erfüllt sein, wenn die Gleichungen (5.) erfüllt sind. Daher muss, wenn die Gleichung des dritten Punctes

$$Gu + Hv + J = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.)$$

lauten soll, durch geeignete Wahl der Coefficienten λ, μ die identische Gleichung erfüllt werden können:

$$Gu + Hv + J = \lambda(Au + Bv + C) + \mu(Du + Ev + F) \quad .. \quad (7.)$$

Man muss also haben:

$$\begin{array}{l} G = \lambda A + \mu D \\ H = \lambda B + \mu E \\ J = \lambda C + \mu F. \end{array}$$

Hieraus folgt durch Elimination von λ und μ

$$GBF - GCE + HCD - HAF + JAE - JDB = 0 \quad ... \quad (8.)$$

Oder in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} G, & A, & D \\ H, & B, & E \\ J, & C, & F \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.)$$

Dies ist die Bedingung, dass die drei Puncte:

$$\left.\begin{array}{l} Au + Bv + C = 0 \\ Du + Ev + F = 0 \\ Gu + Hv + J = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10.)$$

in gerader Linie liegen. Stellen wir die linken Seiten derselben durch die Symbole L, M, N dar, so können wir die Bedingung (6) auch so formuliren:

Wenn die drei Puncte:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

in gerader Linie liegen, so können die Coefficienten λ, μ derartig bestimmt werden, dass man identisch hat:

$$N = \lambda L + \mu M.$$

Die Umkehrung ist zulässig, wie sich aus dem oben Gesagten ergibt. Denn wenn für (u_α, v_α) zugleich L und M verschwinden, so verschwindet auch N. Also gehört die Gerade (u_α, v_α) auch dem Puncte $N = 0$ an.

10. Die Gleichung $u = v$ stellt einen unendlich fernen Punct in der Richtung des Mittellotes dar. Der Punct $u = 0$ ist der Punct O, $v = 0$ der Punct Q. Diese drei Puncte, welche in gerader Linie liegen, erfüllen die vorhin angegebenen Bedingungen. Man schreibe dieselben in der Form:

$$(L \equiv) u - v = 0, \quad (M \equiv) u = 0, \quad (N \equiv) v = 0.$$

11. Man bestimme die Lage des Punctes $u + v = 0$. Eine Gerade dieses Punctes ist (0, 0), eine zweite (1, — 1).

12. Man bestimme die Lage der Puncte $u = 3v$, $u + 3v = 0$.

13. Betrachten wir den Punct:

$$u - v + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11.)$$

Demselben gehören die Geraden an $(0, C)$ und $(-C, 0)$, die mit den Axen ein Parallelogramm bilden. Daher bedeutet (11.) einen unendlich fernen Punct. Derselbe liegt in der Richtung, welche mit den Axen einen Winkel α einschliesst, sodass

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{C}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12.)$$

14. Man bestimme die Entfernung des Punctes

$$Au + Bv + C = 0$$

von den Axen.

Nach §. 6, Gl. 1. haben wir die Gleichung, worin c den Abstand von der V-Axe bedeutet:

$$(c-e)v - cu + ae = 0.$$

Daher muss sein

$$\frac{c-e}{ae} = \frac{B}{C}, \quad -\frac{c}{ae} = \frac{A}{C},$$

oder

$$c = \frac{Ae}{A+B}, \quad c - e = -\frac{Be}{A+B}.$$

Das Verhältniss der Abstände ist also nur von A und B abhängig,

$$\frac{c}{c-e} = -\frac{A}{B} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13.)$$

Puncte, welche zwischen den Axen liegen, haben Gleichungen, in denen A und B dasselbe Vorzeichen besitzen. Dagegen sind A und B von entgegengesetzten Zeichen, wenn der Punct ausserhalb der Axen liegt.

Denn für die ersteren ist $\frac{c}{c-e}$ negativ, für die letzteren positiv.

Zwei Puncte mit den Gleichungen

$$Au + Bv + C = 0, \quad Au + Bv + D = 0$$

liegen auf derselben Parallelen zu den Axen.

Denn das Verhältniss ihrer Abstände von den Axen ist gleich.

Der oben gefundene Ausdruck für c zeigt, dass für Puncte im Unendlichen die Gleichung die Form hat:

$$Au - Av + C = 0,$$

wie wir schon §. 13 erkannten.

15. Man ziehe durch den Punct $Au + Bv + C = 0$ zu der Geraden (u, v) die Parallele.

Die Coordinaten der Parallele sind zu berechnen. Da zwei Gerade mit den Coordinaten u, v und $u + w, v + w$ parallel sind, so muss sein:

$$A(u+w) + B(v+w) + C = 0,$$

also

$$w = -\frac{Au + Bv + C}{A+B} \quad \ldots \ldots \quad (14.)$$

Mithin sind die Coordinaten der gesuchten Geraden:

$$u + w = \frac{Bu - Bv - C}{A + B}, \quad v + w = \frac{Av - Au - C}{A + B}.$$

16. Zwei Punkte mit den Gleichungen

$$Au + Bv + C = 0, \quad Du + Ev + F = 0 \quad . \quad . \quad (15.)$$

sind gegeben. Man bestimme die Gleichung des Mittelpunctes ihrer Verbindungsstrecke.

Man kann der Gleichung aller im Endlichen gelegenen Puncte eine solche Form ertheilen, dass

$$A + B = 1$$

ist. Diese Form soll die Normalform der Punctgleichung heissen. Besitzt $Au + Bv + C = 0$ die Normalform nicht, so ist dies sicher mit

$$\frac{Au + Bv + C}{A + B} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16.)$$

der Fall.

Nehmen wir an, die Gleichungen (15.) haben die Normalform. Legen wir zu der willkürlichen Geraden u, v die Parallelen durch die beiden gegebenen Puncte, so sind die Coordinaten derselben nach §. 15

$$u_1 = B(u - v) - C, \qquad v_1 = A(v - u) - C$$
$$u_2 = E(u - v) - F, \qquad v_2 = D(v - u) - F.$$

Daher die Coordinaten einer Geraden, welche u, v parallel durch die Mitten der von den beiden andern auf den Axen bestimmten Abschnitte geht, η, ω

$$\eta = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \omega = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Also

$$2\eta = (B + E)(u - v) - C - F$$
$$2\omega = (A + D)(v - u) - C - F,$$

und nach Elimination von $u - v$

$$(A + D)\eta + (B + E)\omega + C + F = 0.$$

Wenn $L = 0$ und $M = 0$ die Gleichungen zweier Punkte in der Normalform sind, so ist die Gleichung des Mittelpuncts ihrer Verbindungslinie:

$$L + M = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17.)$$

Allgemein ist die Gleichung des Mittelpuncts der Entfernung der beiden Puncte

$$Au + Bv + C = 0 \quad \text{und} \quad Du + Ev + F = 0,$$

wenn diese Gleichungen nicht die Normalform haben:

$$\frac{Au + Bv + C}{A + B} + \frac{Du + Ev + F}{D + E} = 0. \quad . \quad . \quad (18.)$$

17. Ebenso wie vorhin bestimmt man die Gleichung des in der Richtung der beiden Puncte $L = 0$, $M = 0$ liegenden unendlich fernen Punctes zu $L - M = 0$, wenn L und M die Normalform haben.

18. Die beiden Puncte $L = 0$, $M = 0$ seien wie oben durch ihre Normalform gegeben. Man bestimme auf der Verbindungsgeraden diejenigen zwei Puncte, welche die endliche Strecke zwischen L und M nach dem Verhältnisse $1 : \pm \lambda$ theilen.

Man lege wieder durch $L = 0$ und $M = 0$ die Parallelen zu der willkürlichen Geraden u, v. Sind nun die Coordinaten der durch den gesuchten Punct gelegten Geraden η, ω, so hat man:

$$\eta = \frac{u_2 + \lambda u_1}{1 + \lambda}, \quad \omega = \frac{v_2 + \lambda v_1}{1 + \lambda}$$

und findet nun in derselben Weise wie in dem vorhin behandelten Specialfalle als Gleichungen der beiden gesuchten Puncte

$$\left.\begin{array}{l} M + \lambda L = 0 \\ M - \lambda L = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19.)$$

Die durch (19.) repräsentirten Puncte trennen die gegebenen $L = 0$ und $M = 0$ harmonisch. (Vergl. §. 44.)

Sind M und L nicht in der Normalform gegeben, so hat man an Stelle von (19.)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{Du + Ev + F}{D + E} + \lambda \dfrac{Au + Bv + C}{A + B} = 0 \\ \dfrac{Du + Ev + F}{D + E} - \lambda \dfrac{Au + Bv + C}{A + B} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (20.)$$

als die Puncte, welche

$$Du + Ev + F = 0, \qquad Au + Bv + C = 0$$

harmonisch trennen. Natürlich kommt dies auf (19.) zurück.

19. Die Ecken eines Dreiecks seien durch die Gleichungen in der Normalform gegeben:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21.)$$

Man bestimme die Gleichung des Schwerpuncts.

Die Gleichung des Mittelpuncts von LM ist $L + M = 0$, hat aber nicht die Normalform, da die Summe der Coefficienten von u und v in $L + M = 0$ 2 ist. Da nun die Verbindungslinie von $M + L = 0$ mit N nach dem Verhältnisse 1 : 2 durch den Schwerpunct getheilt wird, so ist die Gleichung dieses Punctes nach Gleichung (20.)

$$L + M + N = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22.)$$

20. Wenn eine Gerade (u, v) mit den Axen den Winkel α bildet, so ist, indem wir α von den Axen nach der positiven Richtung QO hin zählen, wobei $u > v$, wenn α spitz ist,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e}{u - v} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23.)$$

Man kann hieraus den Winkel zweier Geraden (u, v) und (u', v') bestimmen. Nennen wir den Neigungswinkel φ, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = e \frac{u' - v' - (u - v)}{e^2 + (u' - v')(u - v)} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad (24.)$$

Sollen daher 2 Grade (u, v) und (u', v') auf einander senkrecht stehen, so muss sein:

$$e^2 + (u' - v')(u - v) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25.)$$

Betrachtet man in (25.) (u', v') als gegeben, (u, v) als veränderlich, so stellt sie den Punct im Unendlichen dar, welcher in der zu (u', v') senkrechten Richtung liegt.

21. Man bestimme den senkrechten Abstand p des Punctes

$$L \equiv Au + Bv + C = 0$$

von der Geraden (u_0, v_0).

Nach §. 15 Gleichung (14.) ist das Stück, welches die Gerade (u_0, v_0) und die durch den Punct L zu derselben gezogene Parallele auf den Axen abgrenzen, seinem absoluten Werthe nach:

$$w_0 = \frac{Au_0 + Bv_0 + C}{A + B}.$$

Ist α der Neigungswinkel der Geraden (u_0, v_0) zu den Axen, so ist:

$$\sin \alpha = \frac{e}{\sqrt{e^2 + (u_0 - v_0)^2}}.$$

Daher, wenn man w_0 senkrecht projicirt,

$$p = \frac{Au_0 + Bv_0 + C}{(A + B)\sqrt{e^2 + (u_0 - v_0)^2}} \cdot e. \quad . \quad . \quad . \qquad (26.)$$

Gehört die Gerade (u_0, v_0) dem Puncte $L = 0$ an, so verschwindet $Au_0 + Bv_0 + C$; und also auch p. In allen übrigen Fällen hat p entweder das positive oder das negative Vorzeichen. Setzen wir fest, dass der Quadratwurzel $\sqrt{e^2 + (u_0 - v_0)^2}$ immer der positive Werth ertheilt werden soll, so entsteht die Frage, für welche Geraden (u_0, v_0) p einen positiven, für welche einen negativen Werth annimmt.

Verschieben wir die Gerade (u_0, v_0) parallel mit sich selbst, so dass sie die Coordinaten $(u_0 + w_0, v_0 + w_0)$ erhält und bezeichnen den Abstand des Punctes L von der neuen Geraden durch p', so ist

$$\frac{p'}{p} = 1 + w_0 \cdot \frac{A + B}{Au_0 + Bv_0 + C}.$$

Für $w_0 = 0$ wird $p = p'$, wie zu erwarten war. Für

$$w_0 = -\frac{Au_0 + Bv_0 + C}{A + B}$$

wird $p' = 0$ und die Parallele (s. Gl. (14.)) geht durch den Punct $L = 0$. Lassen wir w_0 in derselben Richtung weiterwachsen, so wird $\frac{p'}{p}$ negativ. Daher haben Parallele, welche durch $L = 0$ getrennt werden, entgegengesetzt gerichteten Abstand von diesem Puncte — wie zu erwarten war. Dreht man also eine Gerade in stets gleichem Abstande um $L = 0$ herum, so ändert p sein Vorzeichen; es muss also irgendwo ein Zeichenwechsel stattfinden. Dies ist nur beim Durchgange durch das Unendliche möglich, da die Gerade nicht durch $L = 0$ geht, also der Durchgang durch Null ausgeschlossen ist. Unendlich wird aber p nur für unendlich grosse Werthe einer der Coordinaten, also wenn die sich drehende Gerade den Axen parallel wird.

Für das Mittellot wird

$$p = \frac{C}{A + B}.$$

Das oben Gefundene können wir in das Resultat zusammenfassen: Für alle Lagen einer Geraden, in welche dieselbe ge-

langen kann, ohne durch den Punkt $L=0$ hindurchzugehen oder zu den Axen parallel zu werden, hat p dasselbe Vorzeichen.

Lassen wir p constant und (u_0, v_0) variiren, so erhalten wir den geometrischen Ort aller Geraden, welche von einem festen Puncte gleichen Abstand haben, d. h. die Gleichung des Kreises. Sie lautet also:

$$p^2(A+B)^2(e^2+u^2-2uv+v^2)=e^2(Au+Bv+C)^2. \quad (27.)$$

Darin ist p der Radius, $Au+Bv+C=0$ der Mittelpunct. Nehmen wir

$$2p=e, \quad A=B=1, \quad C=0,$$

so kommen wir auf die specielle Form §. 5, Gl. (1.) zurück.

22. Man bestimme den Abstand zweier Puncte, s.

Mögen die Gleichungen der beiden Puncte die Normalform haben.

$$L \equiv Au+Bv+C=0,$$
$$M \equiv Du+Ev+F=0,$$
$$A+B=1, \quad D+E=1.$$

Daher die Abstände der beiden Puncte von der U-Axe p_1, p_2 weil nach §. 4 und §. 21

$$v_0=\infty, \quad \frac{u_0}{v_0}=0; \quad p_1=eB, \quad p_2=eE.$$

Fällen wir von L und M die Senkrechten auf die Axen, durch die Annahme $u=v$, so finden wir als Projection der Strecke LM auf die Axen: $-C+F$. Daher:

$$s=\sqrt{(B-E)^2e^2+(C-F)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (28.)$$

23. Gegeben eine Gerade (u', v') und ein Punct

$$L \equiv Au+Bv+C=0$$

in der Normalform. Man gebe die Gleichung des Fusspunctes der von dem Puncte L auf die Gerade gefällten Senkrechten an.

Sei die gesuchte Gleichung:

$$M \equiv Du+Ev+F=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29.)$$

so sind D, E, F zu bestimmen. Nehmen wir an, auch (29.) habe die Normalform, also $D+E=1$, so ist, weil M auf der Geraden (u', v') liegt,

$$Du' + Ev' + F = 0, \quad F = -Du' - Ev'.$$

Die Coordinaten (η, ω) der Verbindungsgeraden von L und M finden wir durch Lösung der Gleichungen:

$$A\eta + B\omega + C = 0,$$
$$D\eta + E\omega + F = 0.$$

Da dieselbe senkrecht zu (u', v') sein soll, so hat man zufolge §. 20, Gl. (25.)

$$e^2 + (u' - v')(\eta - \omega) = 0.$$

Eliminiren wir aus diesen drei Gleichungen η und ω, so finden wir D und E.

Das Resultat ist:

$$D = \frac{Ae^2 - (C + v')(u' - v')}{e^2 + (u' - v')^2},$$
$$E = \frac{Be^2 + (C + u')(u' - v')}{e^2 + (u' - v')^2}.$$

Daher die Gleichung des gesuchten Punctes:

$$\{Ae^2 - (C + v')(u' - v')\}(u - u') + \{Be^2 + (C + u')(u' - v')\}(v - v') = 0. \quad (30.)$$

23. Man bestimme den Inhalt eines Dreiecks, wenn die Gleichungen der drei Ecken in der Normalform gegeben sind.

Die drei Puncte mögen die Gleichungen haben $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ und es sei:

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv a_1 u + b_1 v + c_1 = 0 \\ B &\equiv a_2 u + b_2 v + c_2 = 0 \\ C &\equiv a_3 u + b_3 v + c_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31.)$$

$$1 = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3.$$

Ziehen wir durch A und C Parallele, durch B die Senkrechte zu den Axen; möge die durch A gehende Parallele der Dreiecksseite BC im Puncte D begegnen, und der Schnittpunct der Parallelen durch C mit der Senkrechten durch B möge E heissen. Dann ist der Inhalt des Dreiecks

$$J = \tfrac{1}{2} BE \,.\, AD.$$

Möge die Seite BC die Coordinaten u', v' haben, so ist:

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) u' + b_3 c_2 - b_2 c_3 = 0,$$
$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) v' + a_2 c_3 - a_3 c_2 = 0.$$

Werden die Werthe für u', v' in A für u und v eingesetzt, so ergiebt sich nach §. 15 die Länge AD. Ferner hat man:

$$BE:CE = e : v' - u', \quad CE = c_2 - c_3.$$

Setzt man diese Werthe von BE und AD ein, so findet sich:

$$J = \tfrac{1}{2}\, e\, \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \quad \ldots \ldots \quad (32.)$$

24. Man bestimme die Coordinaten einer durch den Punct $L = 0$ gehenden Geraden, welche zu (u', v') senkrecht ist.

Man bestimme u, v aus den beiden Gleichungen:

$$Au + Bv + C = 0,$$
$$e^2 + (u - v)(u' - v') = 0.$$

25. Gegeben die drei Ecken des Dreiecks. Man bestimme die Gleichung des Höhenpunctes.

Man nehme eine Seite des Dreiecks zur V-Axe, lege die U-Axe durch die Gegenecke. Dann sind die Gleichungen der drei Ecken:

$$u = 0, \quad v - a = 0, \quad v - b = 0.$$

Da der Höhenpunct auf OQ liegt, so hat seine Gleichung die Form:

$$Au + Bv = 0.$$

Seine Verbindungslinie mit $v - a = 0$ hat die Coordinaten $v = a$, $u = -\frac{Ba}{A}$. Diese Gerade ist senkrecht zur Seite $u = 0$, $v = b$, daher

$$e^2 + \left(\frac{Ba}{A} + a\right) b = 0; \qquad \frac{B}{A} = -\frac{e^2 + ab}{ab},$$

also die gesuchte Gleichung:

$$(u - v)\, ab - e^2 v = 0 \quad \ldots \ldots \quad (33.)$$

26. Man bestimme die Gleichung des Mittelpuncts des umschriebenen Kreises.

Wenn dieselbe in der Normalform lautet:

$$Au + Bv + C = 0,$$

so bestehen nach §. 22, Gl. (28) die Gleichungen:

$$B^2 e^2 + C^2 = (B - 1)^2 e^2 + (C + a)^2 = (B - 1)^2 e^2 + (C + b)^2.$$

Daraus folgt:

$$C + a = \pm (C + b),$$

mithin ist das untere Vorzeichen zu nehmen. Man findet nach Multiplication mit $2e^2$

$$u(e^2+ab)+v(e^2-ab)-e^2(a+b)=0 \quad \text{oder}$$

$$(u+v)e^2+(u-v)ab-e^2(a+b)=0. \quad . \quad . \quad (34.)$$

Die Gleichung des Schwerpunctes ist:

$$u+2v-a-b=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35.)$$

Schreibt man nun (33.), (34.), (35), wie folgt:

$$(u-v)ab=e^2v,$$
$$(u+v-a-b)e^2+(u-v)ab=0,$$
$$(u+v-a-b)e^2+\qquad e^2v=0,$$

so erkennt man, dass das Bestehen zweier das der dritten zur Folge hat.

Die drei Puncte liegen also in gerader Linie. Eulerscher Satz.

Zur Übung beweise man mit Hülfe von Gl. (28.), dass der Abstand des Punctes (35.) vom Puncte (33.) doppelt so gross ist, als der desselben von (34.).

Die Gleichungen müssen zunächst in die Normalform gesetzt werden.

27. Man bestimme die Gleichung eines Punctes, der von drei gegebenen Geraden gleichen Abstand hat.

Nehmen wir dasselbe Dreieck wie in den vorigen Aufgaben, so finden wir nach §. 21, wenn $Au+Bv+C=0$ die Gleichung des gesuchten Punctes ist, für die Abstände desselben von den Dreiecksseiten die Ausdrücke: $(A+B=1)$

$$\frac{Ba+C}{\sqrt{a^2+e^2}}\cdot e,\quad \frac{Bb+C}{\sqrt{b^2+e^2}}\cdot e\,Ae.$$

Ertheilen wir den Wurzeln die positiven Vorzeichen, so erhalten die beiden ersten Ausdrücke entgegengesetzte Werthe. Daher

$$\frac{Ba+C}{\sqrt{a^2+e^2}}=-\frac{Bb+C}{\sqrt{b^2+e^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36.)$$

Über das Vorzeichen von Ae könnte noch Zweifel entstehen. Da der gesuchte Mittelpunct bei der hier gewählten Lage des Dreiecks sicher zwischen den Axen liegt, so haben A und B nach §. 14, Gl. (13. ff.) einerlei, also das positive Vorzeichen. Also ist Ae eine positive Grösse. Nehmen wir nun $b>a$ an, so können wir durch stetige Bewegung die Gerade $(0, b)$ dem

Mittellote parallel machen, ohne Durchgang durch den Mittelpunct unseres Kreises und ohne Durchgang durch die den Axen parallele Lage. In dieser, dem Mittellote parallelen Lage, aber wird der Abstand unsers gesuchten Punctes in derselben Richtung gezählt wie die positiven u und v. Er ist also eine positive Grösse und darum ist der Abstand der Geraden $(0, b)$ ebenfalls positiv. Mithin ist

$$\frac{Bb + C}{\sqrt{b^2 + e^2}} = Ae. \quad \ldots\ldots \quad (37.)$$

Aus den Gleichungen (36.) und (37.) bestimmen wir nun die Werthe für A, B, C und erhalten dann als Gleichung des Mittelpuncts des eingeschriebenen Kreises:

$$u(b-a) + v(\sqrt{a^2+e^2} + \sqrt{b^2+e^2}) = a\sqrt{b^2+e^2} + b\sqrt{a^2+e^2}. \quad (38.)$$

Zur Übung leite man diese Gleichung direct geometrisch ab und bestimme die Gleichungen der Mittelpuncte der angeschriebenen Kreise.

28. Zweiseitigkeit der Geraden.

Wie schon §. 21 hervorgehoben wurde, bietet sich beim Durchgang durch das Unendliche eine Zeichenänderung dar. Der Abstand der Geraden (u, v) vom Puncte $Au + Bv + C = 0$ wurde bestimmt als

$$p = \frac{Au + Bv + C}{(A + B)\sqrt{(u-v)^2 + e^2}}\, e.$$

Halten wir u fest und lassen v durch lauter positive Werthe ins Unendliche zunehmen, was geometrisch einer Drehung um einen Punct der U-Axe gegen den Uhrzeiger gleichkommt, so wird

$$p = \frac{Be}{A + B}$$

als Abstand von der U-Axe ermittelt. Lassen wir aber v durch negative Werthe unendlich werden, so wird der Zähler des obigen Bruches im Vorzeichen mit $-B$ übereinstimmend, während im Nenner die Wurzel nach unserer Festsetzung positiv bleibt. Daher finden wir nun:

$$p = -\frac{Be}{A + B}$$

als Abstand unseres Punctes von der U-Axe. Die Drehung geschah diesmal mit dem Uhrzeiger.

Lassen wir beidemale die Gerade von der Lage, wo sie durch

den Punct $Au + Bv = 0$ geht, ihre Drehung beginnen und unterscheiden an derselben zwei verschiedene Seiten, — etwa Ufer —, so finden wir, dass sie in der Endlage als U-Axe dem Puncte verschiedene Ufer zukehrt.

Dieselbe Anschauung ergibt sich auch bei Betrachtung der in einem Sinne fortgesetzten Drehung. Möge die Gerade L sich um den Punct A drehen und von einer Lage ausgehen, wo sie durch den Punct B geht. Nach einer geringen Drehung hat der Punct B von der Geraden einen gewissen Abstand, der sein Vorzeichen nicht ändert, bis eine Drehung um zwei rechte Winkel erfolgt ist. Dann wird eine Zeichenänderung eintreten und die Gerade kehrt dem Punkt jetzt die Gegenseite zu.

In dieser letzteren Darstellung fehlt die Rücksicht auf ein Coordinatensystem, also auch die Bestimmung des Vorzeichens der Wurzel $\sqrt{(u-v)^2 + e^2}$, welche ihrerseits die Zeichenänderung beim Durchgange durch das Unendliche herbeiführte. Denn es wurde das Vorzeichen von p nun abhängig von dem der Grösse w des §. 15.

Dritter Abschnitt.

Der Kreis.

29. Die Gleichung des Kreises, welcher mit dem Radius r um den Punct:

$$L \equiv Au + Bv + C = 0 \quad . \quad . \quad , \quad . \quad (1.)$$

beschrieben wird, lautet in Liniencoordinaten (vergl. §. 21, Gl. (27.))

$$r^2(A+B)^2((u-v)^2 + e^2) = (Au + Bv + C)^2 e^2. \quad . \quad (2.)$$

Also, wenn $A + B = 1$,

$$r^2((u-v)^2 + e^2) = (Au + Bv + C)^2 e^2. \quad . \quad . \quad (3.)$$

Stellen wir mit dieser Gleichung die eines Punctes:

$$M \equiv Du + Ev + F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.)$$

zusammen, so erhalten wir im Allgemeinen zwei Werthepaare (u_1, v_1) und (u_2, v_2), welche beiden Gleichungen genügen. Diese Geraden (u_1, v_1) und (u_2, v_2) gehören sowohl dem Puncte M als auch dem Tangentencomplexe von (2.) an. Wir erhalten also die Lösung der Aufgabe, an einen Kreis von einem Puncte aus die Tangenten zu ziehen.

Da an einen Kreis im allgemeinen von einem Puncte zwei Tangenten gehen oder, da die Auflösung von (2.) und (4.) zu einer quadratischen Gleichung führt, ist der Kreis eine Curve zweiter Classe. Lassen sich von einem Puncte aus an eine Curve n Tangenten ziehen, so ist ihre Gleichung vom n^{ten} Grade in Liniencoordinaten. Man nennt eine solche Curve eine Curve n^{ter} Classe.

30. Gleichung des Berührungspunctes.

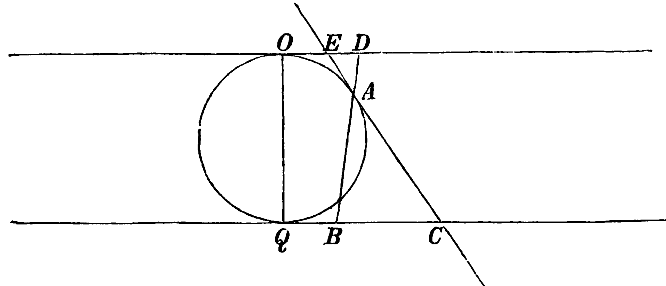


Fig. 1.

Sei $OE = u'$, $QC = v'$, A der Berührungspunct dieser Geraden EC. DB sei eine beliebige andere durch A gehende Gerade, deren Coordinaten $OD = u$, $QB = v$. Dann ist $OE = EA = u'$, $QC = CA = v'$, daher:

$$u - u' : v' - v = u' : v', \quad \text{oder nach §. 5, Gl. (1.)},$$

$$uv' + vu' = 2u'v' = 2r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.)$$

Dies ist die Gleichung des Berührungspunctes auf der Tangente (u', v').

31. Man ziehe vom Puncte $L = 0$ aus eine Tangente an den Kreis.

Die Gleichung des Punctes sei:

$$L \equiv Au + Bv + C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.)$$

Die des Kreises ist:

$$uv = r^2,$$

daher die Coordinaten der beiden Tangenten:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4ABr^2}}{2A}, \quad v_1 = \frac{-C - \sqrt{C^2 - 4ABr^2}}{2B}; \\ u_2 &= \frac{-C - \sqrt{C^2 - 4ABr^2}}{2A}, \quad v_2 = \frac{-C + \sqrt{C^2 - 4ABr^2}}{2B}. \end{aligned}\right\} \quad (7.)$$

32. Man bestimme auf den vom Puncte L, (Gl. (6.)) an den Kreis gelegten Tangenten die Gleichungen der Berührungspuncte.

Nach Gleichung (5.) lauten diese:

$$uv_1 + vu_1 = 2r^2, \quad uv_2 + vu_2 = 2r^2,$$

oder

$$C(Au + Bv) \pm \sqrt{C^2 - 4ABr^2}(Au - Bv) + 4r^2AB = 0. \quad (8.)$$

Man sieht, dass diese Gleichungen, ebenso wie die Ausdrücke (7.), nicht immer reell sind. Sobald $C^2 - 4ABr^2 < 0$, sind die Berührungspuncte nicht mehr reell vorhanden; es ist unmöglich, von dem so bestimmten Puncte Tangenten an den Kreis zu legen. Trotzdem ist es zweckmässig, diesen Tangenten eine besondere Aufmerksamkeit zu schenken und sie als imaginäre den in der Zeichnung vorhandenen reellen Tangenten gegenüberzustellen.

Nach §. 22, Gl. (28.) hatten wir

$$s = \sqrt{(B - E)e^2 + (C - F)^2}$$

als Entfernung der beiden Puncte $Au + Bv + C = 0$ und $Du + Ev + F = 0$ (in der Normalform) gefunden. Wenden wir dies auf den Kreismittelpunct und $L = 0$ an, so ist

$$s = \sqrt{\left(\frac{B}{A+B} - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4r^2 + \frac{C^2}{(A+B)^2}} = \frac{\sqrt{C^2 + r^2(A-B)^2}}{A+B}.$$

Daher erkennt man, dass es „unmöglich“ ist, an den Kreis von $L = 0$ Tangenten zu ziehen, wenn $s < r$, was mit dem Obigen stimmt, da

$$\sqrt{s^2 - r^2} = \frac{\sqrt{C^2 - 4ABr^2}}{A + B}.$$

33. Man bestimme die Coordinaten der zu $L = 0$ gehörigen Berührungssehne.

Combinirt man die Gleichungen (8.) miteinander, so geht die Wurzel ohne Einwirkung auf das Resultat verloren. Die Berührungssehne erscheint als Verbindungslinie der beiden Puncte

$$\left.\begin{aligned} Au - Bv &= 0, \\ Au + Bv + 4r^2 \cdot \frac{AB}{C} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.)$$

Man findet als die gesuchten Coordinatenwerthe:

$$u = -2r^2 \frac{B}{C}, \quad v = -2r^2 \frac{A}{C}.$$

Demnach ist also die Berührungssehne immer reell vorhanden, ob auch die Berührungspuncte und Tangenten imaginär werden.

34. Gegeben die Gerade (u', v'). Man bestimme die Gleichung desjenigen Punctes, welchem sie als Berührungssehne zugehört.

Nach dem vorigen §. hat man

$$A = -\frac{Cv'}{2r^2}, \quad B = -\frac{Cu'}{2r^2},$$

daher:

$$uv' + vu' - 2r^2 = 0.$$

Dies ist Gleichung (5.) des §. 30. Nur war dort (u', v') Tangente des Kreises, während sie hier völlig willkürlich ist.

35. Der Schnittpunct zweier Tangenten heisst der Pol der Berührungssehne, seiner Polare. Pol und Polare stehen sich also folgendermassen gegenüber: *Definition.*

Ist eine Gerade (u', v') gegeben, so hat ihr Pol die Gleichug:

$$uv' + vu' = 2r^2.$$

Ist ein Pol durch die Gleichung gegeben:

$$Au + Bv + C = 0,$$

so hat seine Polare die Coordinaten:

$$u' = -2r^2 \cdot \frac{B}{C}, \quad v' = -2r^2 \cdot \frac{A}{C}.$$

36. Ist der Pol der Mittelpunct des Kreises, so ist:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 0.$$

Daher werden u' und v' beide unendlich und ihr Verhältniss Eins. Die Polare des Mittelpuncts ist also die unendlich ferne Gerade.

Für jeden Punct des Mittellotes hat man die Gleichung:

$$Au + Bv = 0.$$

Daher werden u', v' beide unendlich, aber ihr Verhältniss durchläuft die Werthe $B : A$. Liegt also der Pol auf dem Mittellote, so ist die Polare den Axen parallel.

Liegt der Pol auf der Mittellinie der Axen, so lautet seine Gleichung:

$$u + v + C = 0.$$

Demnach werden u' und v' einander gleich. Die Polare steht senkrecht zu den Axen.

Liegt der Pol im Unendlichen, so lautet seine Gleichung:

$$u - v + C = 0;$$

u' und v' haben gleiche, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen versehene Werthe. Daher wird die Polare durch den Mittelpunct des Kreises gehen.

37. Wenn eine Gerade die Coordinaten hat (u_1, v_1) und eine zweite die Coordinaten (u_2, v_2), dann läuft jede Gerade mit den Coordinaten $u_1 + \lambda(u_1 - u_2)$, $v_1 + \lambda(v_1 - v_2)$ durch den Schnittpunct derselben.

Denn die Coordinaten $u_1 + \lambda(u_1 - u_2)$, $v_1 + \lambda(v_1 - v_2)$ befriedigen die Gleichung des Schnittpunctes:

$$\frac{u - u_1}{v - v_1} = \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}.$$

Die Pole der drei genannten Geraden haben aber die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} u \,.\, v_1 + v \,.\, u_1 = 2r^2 \\ u \,.\, v_2 + v \,.\, u_2 = 2r^2 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11.)$$

$$u \,.\, v_1 + v \,.\, u_1 + \lambda \,\{v(u_1 - u_2) + u(v_1 - v_2)\} = 2r^2.$$

Da die dritte Gleichung Folge der beiden ersten ist, so liegen die drei Pole in gerader Linie.

Demnach der Satz: Dreht sich eine Gerade um einen Punct, so durchläuft der Pol eine Gerade.

Diese Gerade hat die Coordinaten (u', v'), welche den Gleichungen (11.) genügen, nämlich:

$$u' = 2r^2 \frac{u_1 - u_2}{u_1 v_2 - v_1 u_2}, \quad v' = -\,2r^2 \frac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - v_1 u_2}.$$

Suchen wir den Pol derselben auf, so finden wir:

$$u(v_1 - v_2) - v(u_1 - u_2) + u_1 v_2 - v_1 u_2 = 0. \quad . \; . \; . \quad (12.)$$

Dies ist die Gleichung des Schnittpunctes der beiden Geraden (u_1, v_1) und (u_2, v_2). Daher kann man den obigen Satz folgendermassen vervollständigen:

Dreht sich eine Gerade um einen Punct, so durchläuft der Pol derselben eine Gerade, die Polare des Drehungspunctes.

38. Diesem Satze steht der folgende gegenüber:

Durchläuft ein Punct eine Gerade, so dreht sich seine Polare um einen festen Punct, den Pol der Geraden.

Da wir die rein formale Definition für Pol und Polare, nämlich die durch die Gleichungen des §. 35 gegebene gewählt

haben, so ist der Beweis für den vorstehenden Satz ebenso zu führen, wie der Nebensatz im §. 37 bewiesen wurde.

Der Punct:

$$A(u - u_1) + B(v - v_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13.)$$

liegt auf der Geraden (u_1, v_1) und durchläuft dieselbe, wenn A und B alle Werthe annehmen. Bestimmt man nun die Coordinaten (u', v') der Polare dieses Punctes und eliminirt den Quotienten $\frac{A}{B}$, so resultirt:

$$v_1 u' + u_1 v' = 2r^2,$$

und diese Gleichung drückt aus, dass (u', v') die Gleichung des Poles der Geraden (u_1, v_1) befriedigen, dass also die Polare des Punctes (13.) durch den Pol der Geraden (u_1, v_1) geht, auf welcher er sich fortbewegt.

39. Zwei Sätze, welche sich derart gegenüberstehen, dass Punct und Gerade ihre Rollen in denselben vertauschen, nennt man polare Nebensätze.

40. Man bestimme den Abstand des Poles und seiner Polare vom Mittelpuncte des Kreises.

Da der Mittelpunct des Kreises in der Normalform die Gleichung hat:

$$\frac{u + v}{2} = 0,$$

so liefert §. 22, indem $e = 2r$, als Abstand des Poles:

$$\frac{v'u + u'v}{u' + v'} - \frac{2r^2}{u' + v'} = 0$$

vom Mittelpuncte:

$$s_1 = \sqrt{4r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{u'}{u' + v'}\right)^2 + \frac{4r^2}{(u' + v')^2}} = r\,\frac{\sqrt{4r^2 + (u' - v')^2}}{u' + v'}.$$

Dagegen ist nach §. 21 der Abstand des Kreismittelpunctes von der Geraden (u', v'):

$$s_2 = \frac{u' + v'}{2\sqrt{4r^2 + (u' - v')^2}} \cdot 2r.$$

Demnach erhält man:

$$s_1 s_2 = r^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14.)$$

Das Rechteck gebildet aus den Abständen des Mittelpunctes vom Pol und der zugeordneten Polare ist constant.

41. Man bestimme die Verbindungslinie des Kreismittelpunctes mit dem Pole.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Coordinaten der fraglichen Geraden durch Auflösung der beiden Gleichungen:

$$u + v = 0$$
$$v'u + u'v = 2r^2,$$

welche die beiden genannten Puncte darstellen. Man findet:

$$u_0 = \frac{2r^2}{v' - u'}, \quad v_0 = \frac{2r^2}{u' - v'}.$$

42. Die Polare steht senkrecht zu der Verbindungslinie des Poles mit dem Mittelpuncte.

Denn die Gleichung (25.) des §. 20, welche ausdrückt, dass (u_0, v_0) auf (u', v') senkrecht steht, lautet:

$$4r^2 + (u' - v')(u_0 - v_0) = 0.$$

Und diese ist erfüllt, wie die im vorigen §. gefundenen Ausdrücke zeigen. Gleichung des Fusspuncts.

43. Man kann sich jetzt von dem Verhalten des Pols und seiner Polare eine sehr anschauliche Vorstellung machen. Ist der Pol ein Punct des Kreises, so ist die Polare die Tangente in diesem Puncte. Rückt der Pol zum Centrum, so entfernt sich die Polare und wird zur unendlich fernen Geraden, wenn der Pol das Centrum erreicht. Tritt der Pol aus dem Kreise heraus, so wird die Polare seine Berührungssehne.

44. Auf einer Strecke AB bewege sich ein Punct x. Alsdann durchläuft das Verhältniss $\frac{xA}{xB}$ alle möglichen numerischen Werthe von Null bis Unendlich. Insbesondere hat es im Puncte A den Werth Null, in der Mitte von AB den Werth Eins und in B den Werth Unendlich. Bewegt sich nun ein zweiter Punct ξ auf einem der sich ins Unendliche erstreckenden Theile der Geraden, so hat das Verhältniss $\frac{\xi A}{\xi B}$ ebenfalls alle Werthe zu durchlaufen von Null bis Unendlich. Befindet sich ξ unendlich fern, so hat der Quotient den Werth Eins. Da jeder Werth der Quotienten $\frac{xA}{xB}$ und $\frac{\xi A}{\xi B}$ nur an je einer Stelle auftreten kann, so gehört zu jedem Puncte x ein einziger zugeordneter Punct ξ.

Vier Puncte von der vorhin beschriebenen Art nennt man

harmonische Puncte. Und zwar sind AB das eine, x, ξ das andere Paar zugeordneter harmonischer Puncte.

Nun wird in den Elementen der Satz bewiesen: Wenn durch einen Punct vier Gerade gehen und dieselben eine fünfte Gerade in den Puncten A, B, x, ξ schneiden, so ist das Doppelverhältniss

$$\frac{xA}{xB} : \frac{\xi A}{\xi B}$$

durchaus unabhängig von der Lage dieser fünften Geraden.

Gerade, welche sich in einem Puncte schneiden, nennt man Strahlen und die Gesammtheit derselben ein Strahlbüschel.

Insbesondere nennt man vier Gerade, welche vier harmonische Puncte mit einem fünften Puncte verbinden, harmonische Strahlen. Dieselben treffen jede willkürliche Gerade in vier harmonischen Puncten und zwar in unveränderter Zuordnung.

Nennt man M die Mitte von AB, so ist das Rechteck $Mx \,.\, M\xi$ von unveränderlicher Grösse,

$$Mx \,.\, M\xi = MA^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15.)$$

45. Seien u_1, u_2 die Abstände zweier Puncte A und B auf der U-Axe vom Grundpuncte O. Ein dritter Punct habe den Abstand x, dann wird der Abstand ξ eines vierten dem dritten in Bezug auf A und B zugeordneten harmonischen Punctes durch die Gleichung gefunden:

$$\frac{x - u_1}{u_2 - x} = \frac{\xi - u_1}{\xi - u_2}. \;{}^{*)}$$

Dieselbe giebt nach ξ aufgelöst:

$$\xi = \frac{x(u_1 + u_2) - 2u_1u_2}{2x - (u_1 + u_2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16.)$$

Stellen wir nun dem Kreise $uv = r^2$ den Punct

$$L \equiv Au + Bv + C = 0$$

gegenüber, so finden wir für die Coordinaten u_1, u_2 und v_1, v_2 der Tangenten, welche sich von diesem Puncte aus an den Kreis legen lassen, die quadratischen Gleichungen:

---

*) Schreibt man $\frac{\xi - u_1}{\xi - u_2} = \lambda$, so ist $\frac{x - u_1}{x - u_2} = -\lambda$. Die Zähler und Nenner sind jetzt mit Vorzeichen — in festgesetzter Richtung — gemessene Strecken. Die Strecke AB ist im Verhältnisse $\pm \lambda$ getheilt. Vergl. §. 18.

$$Au^2 + Cu + Br^2 = 0,$$
$$Bv^2 + Cv + Ar^2 = 0,$$ daher:
$$u_1 + u_2 = -\frac{C}{A}, \quad v_1 + v_2 = -\frac{C}{B},$$
$$u_1 \, . \, u_2 = \frac{Br^2}{A}, \quad v_1 \, . \, v_2 = \frac{Ar^2}{B}.$$
Legen wir nun durch den Punct L die Gerade (u_0, v_0), so ist
$$Au_0 + Bv_0 + C = 0.$$
Suchen wir nun die Gerade (u', v'), welche die U-Axe in dem zu $u = u_0$ conjugirten harmonischen Puncte trifft, während $u = u_1$ und $u = u_2$ das andere Paar sind, und die V-Axe analog für v_0, v_1, v_2 schneidet, so ist:
$$-u' = \frac{Cu_0 + 2Br^2}{2Au_0 + C}, \quad -v' = \frac{Cv_0 + 2Ar^2}{2Bv_0 + C}.$$
Man beachte, dass $2Au_0 + C = -(2Bv_0 + C)$.

Dann ergiebt sich
$$Au' + Bv' + C = 0$$ und
$$u_0 v' + v_0 u' = 2r^2.$$
Die erste dieser beiden Gleichungen zeigt an, dass (u', v') durch den Punct $L = 0$ geht, wie zu erwarten war.

Die zweite zeigt an, dass (u', v') durch den Pol der Geraden (u_0, v_0) geht. Denn sie hat die Form der Gl. (5.) des §. 30.

Wenn man also zu einer willkürlichen Geraden, die durch den Schnittpunct zweier Tangenten eines Kreises geht, den zugeordneten vierten harmonischen Strahl bestimmt, während das Tangentenpaar das andere Paar harmonischer Strahlen bildet, so erhält man eine durch den Pol der ersten Geraden gehende Gerade. Zieht man also von den sämmtlichen Puncten einer Geraden an einen Kreis die Tangentenpaare, fasst dieselben als ein Paar harmonischer Strahlen auf und bestimmt den vierten der Geraden zugeordneten Strahl, so laufen alle diese Strahlen durch einen Punct, den Pol der Geraden. Auf der Polare eines Punctes erscheinen demnach vom Pol, dem Schnittpuncte des zugehörigen Tangentenpaares, aus gesehen vier harmonische Puncte; die Berührungspuncte bilden das eine Paar, der Schnittpunct einer willkürlichen durch den Pol gehenden Geraden und deren Pol das andere. Dreht sich also eine Gerade um einen als Pol aufzufassenden Punct, so liegen auf ihr vier harmonische Puncte; das

eine Paar sind die Schnittpuncte mit dem Kreise; das andere der Pol und der Schnittpunct mit der Polare.

Im Vorstehenden haben wir die Sätze über Pol und Polare zusammengestellt, welche oft auch als Definition ausgesprochen werden. Sie sind im Wesentlichen nur Modificationen einer und derselben geometrischen Beziehung. Man kann ihnen noch folgenden Wortlaut geben:

Dreht sich eine Gerade um einen Punct, so ist der geometrische Ort der vierten diesem Puncte in Bezug auf die Kreisschnittpuncte zugeordneten harmonischen Puncte eine Gerade; die Polare des Punctes.

Durchläuft ein Punct eine Gerade, so ist der geometrische Ort der vierten dieser Geraden in Bezug auf die Kreistangenten zugeordneten harmonischen Strahlen ein Punct; der Pol der Geraden.

Ein Paar polarer Nebensätze.

46. Gegeben die Gerade (u_0, v_0). In welchen Puncten schneidet sie den Kreis?

Wir lösen diese Aufgabe, indem wir die Gleichungen der beiden Schnittpunete angeben. Die Schnittpuncte sind dadurch charakterisirt, dass von ihnen aus die beiden Tangenten (§. 31) zusammenfallen. Wenn daher

$$A(u - u_0) + B(v - v_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17.)$$

die Gleichung eines der gesuchten Puncte ist, so muss nach §. 31, Gl. (7.) sein:

$$(Au_0 + Bv_0)^2 - 4ABr^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (18.)$$

Dieselbe liefert den Werth des Quotienten $\frac{A}{B}$

$$\frac{A}{B} = \frac{r + \sqrt{r^2 - u_0 v_0}}{r - \sqrt{r^2 - u_0 v_0}} \cdot \frac{v_0}{u_0},$$

daher die Gleichung eines der gesuchten Puncte:

$$r\,\{uv_0 + vu_0 - 2u_0v_0\} + \sqrt{r^2 - u_0v_0}\,\{uv_0 - vu_0\} = 0. \quad (19.)$$

Für den zweiten hat die Wurzel das entgegengesetzte Vorzeichen.

Ist u_0, v_0 selbst Tangente, so haben wir die Gleichung des Berührungspunctes (§. 30, Gl. (5.)) vor uns.

Die Schnittpuncte werden imaginär, wenn $u_0 v_0 > r^2$.

47. Seien drei Kreise in der Form (2.) gegeben.

Also:

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 (A_1 + B_1)^2 \{(u-v)^2 + e^2\} &= (A_1 u + B_1 v + C_1)^2 e^2, \\ r_2^2 (A_2 + B_2)^2 \{(u-v)^2 + e^2\} &= (A_2 u + B_2 v + C_2)^2 e^2, \\ r_3^2 (A_3 + B_3)^2 \{(u-v)^2 + e^2\} &= (A_3 u + B_3 v + C_3)^2 e^2. \end{aligned}\right\} \quad (20.)$$

Dann findet man durch Auflösung quadratischer Gleichungen ihre gemeinsamen Tangenten. Dieselben schneiden sich in den sogenannten Ähnlichkeitspuncten. Als Gleichungen dieser Puncte erhält man beispielsweise:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{A_1 + B_1}{A_2 + B_2} = \pm \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{A_2 u + B_2 v + C_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21.)$$

Denken wir uns die Gleichungen unserer Puncte in die Normalform gesetzt und nun:

$$L_\alpha \equiv A_\alpha u + B_\alpha v + C_\alpha$$
$$(\alpha = 1,\ 2,\ 3)$$

zur Abkürzung geschrieben, so erhalten wir folgende sechs Ähnlichkeitspuncte:

$$1)\ \frac{r_1}{r_2} = \frac{L_1}{L_2}, \quad 2)\ \frac{r_1}{r_2} = -\frac{L_1}{L_2}, \quad 3)\ \frac{r_2}{r_3} = \frac{L_2}{L_3}, \quad 4)\ \frac{r_2}{r_3} = -\frac{L_2}{L_3},$$
$$5)\ \frac{r_3}{r_1} = \frac{L_3}{L_1}, \quad 6)\ \frac{r_3}{r_1} = -\frac{L_3}{L_1}.$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt nach §. 18, dass je zwei zusammengehörende Ähnlichkeitspuncte die Centrale ihrer Kreise harmonisch theilen.

Nimmt man $r_1 = r_2$ an, so wird die Gleichung des ersten

$$(A_1 - A_2)\, u + (B_1 - B_2)\, v + C_1 - C_2 = 0$$

oder

$$(A_1 - A_2)(u - v) + C_1 - C_2 = 0.$$

Da dies die Gleichung eines unendlich fernen Punctes ist, so sind die Puncte 1, 3, 5 äussere Ähnlichkeitspuncte. Da aus den Gleichungen (1.), (3.) die Gleichung (5.) folgt, so liegen diese drei Puncte in gerader Linie. Dasselbe ist der Fall bei:

1, 3, 5
1, 4, 6
3, 2, 6
5, 2, 4.

48. Betrachten wir den Punct

$$u - v = ei, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22.)$$

so ist derselbe ein imaginärer und wegen §. 13 ein unendlich ferner Punct.

Stellen wir denselben mit dem Kreise

$$r^2 (A + B)^2 \{(u - v)^2 + e^2\} = (Au + Bv + C)^2 e^2 \quad . \quad . \quad (23.)$$

zusammen, so finden wir die Tangenten, welche von dem Puncte (22.) an den Kreis (23.) gehen, durch die mit (22.) combinirte Gleichung

$$(Au + Bv + C)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24.)$$

Dies lehrt, dass die genannten Tangenten erstens zusammenfallen, weil die letzte Gleichung nur uneigentlich quadratisch ist, also aus (22.) und (24.) nicht zwei Werthepaare (u, v), sondern nur eins gewonnen wird. Der Punct (22.) gehört also dem Kreise an und, weil (23.) ganz allgemein ist, allen Kreisen der Ebene. Da zweitens (24.) die Gleichung des Mittelpunctes ist, so geht die Tangente des unendlich fernen Kreispunctes, welche durch Combination von (22.) mit (24.) gewonnen wird, durch den Mittelpunct des Kreises.

Es existiren also auf der unendlich fernen Geraden zwei Puncte I und J, welche allen Kreisen der Ebene gemeinsam sind, **die unendlich fernen Kreispuncte.** Ihre Gleichungen sind:

$$u - v = ei, \qquad u - v = -ei. \quad . \quad . \quad . \quad (25.)$$

Nach §. 20, Gl. (24.) findet man den Winkel φ der Strahlen (u, v) und (u', v') durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi = e \frac{u' - v' - (u - v)}{e^2 + (u' - v')(u - v)}.$$

Wenn nun $u' - v' = ei$, also (u', v') die Richtung zum Puncte I besitzt, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ei - (u - v)}{e + i(u - v)} = i \frac{ei - (u - v)}{ei - (u - v)} = i.$$

Alle Geraden (u, v) bilden also mit (u', v') Winkel, deren trigonometrische Tangente i ist.

Vierter Abschnitt.

Die Kegelschnittsgleichungen.

49. Wenn ein Punct sich so bewegt, dass die Summe oder Differenz seiner Abstände von zwei festen Puncten constant ist, so beschreibt er im ersteren Falle eine Ellipse, im letzteren eine Hyperbel. Die beiden festen Puncte nennt man die Brennpuncte.

Wenn ein Punct sich so bewegt, dass er von einer festen Geraden, der Leitlinie, und von einem festen Puncte, dem Brennpuncte, stets gleichen Abstand hat, so beschreibt er eine Parabel.

50. Verbindet man irgend einen Punct der Ebene mit den sämmtlichen Puncten eines Kreises und errichtet jedesmal die Mittelsenkrechte, so umhüllen diese sämmtlichen Mittelsenkrechten eine gewisse Curve.

Liegt der Punct beispielsweise im Centrum des Leitkreises, so umhüllen die Mittelsenkrechten einen concentrischen Kreis.

Liegt er auf der Peripherie der Leitkreises, so gehen alle Mittelsenkrechten durch das Centrum. Also vertritt dieser Punct die Stelle der umhüllten Curve.

Ich behaupte nun Folgendes. Liegt der Punct (Brennpunct) innerhalb des Leitkreises, so umhüllen die Mittelsenkrechten eine Ellipse; liegt er ausserhalb des Leitkreises, so umhüllen sie eine Hyperbel; wird des Leitkreis zur Geraden, so umhüllen die Mittelsenkrechten eine Parabel.

Durch dieses Verhalten erscheinen die drei Curven unter einem einheitlichen Gesichtspuncte. Es ist daher zweckmässig, für alle drei einen gemeinsamen Namen zu besitzen. Man nennt sie Kegelschnitte.

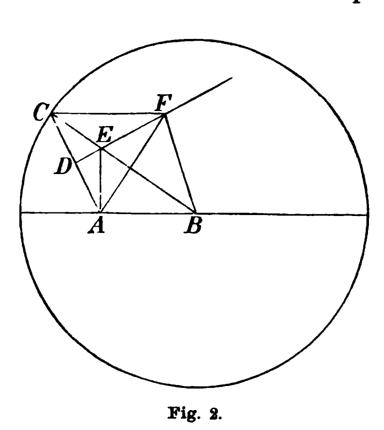


Fig. 2.

51. Beweis der im §. 50 behaupteten Eigenschaften. A sei der eine Brennpunct, C ein Punct des Leitkreises, FD sei die Mittelsenkrechte von CA, dann ist $CE = EA$, daher $AE + EB = BC$, mithin unveränderlich. Also liegt der Punct E auf einer Ellipse mit den Brennpuncten A und B.

Greifen wir nun einen willkürlichen Punct F auf der Mittelsenkrechten heraus, so ist $FA + FB = FB + FC > BC$. Also hat kein zweiter Punct der Mittelsenkrechten die Eigenschaft, der Ellipse anzugehören. Sie ist Tangente der Ellipse.

In der folgenden Figur ist Alles analog wie vorhin, nur jetzt:

$$BE - AE = BE - EC = BC.$$

Ferner ist für den willkürlichen Punct F

$$FB - FA = FB - FC < BC.$$

Der Punct E gehört einer Hyperbel mit den Brennpuncten A, B an. Die Mittelsenkrechte DE von AC ist Tangente der

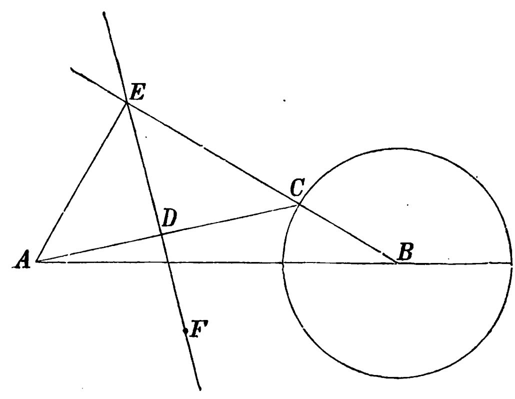


Fig. 3.

Hyperbel; denn DE hat mit der Hyperbel nur den Punct E gemeinsam und die Nachbarpuncte der Curve in der Nähe von E liegen alle auf der A zugewandten Seite von DE. Um das letztere einzusehen, nehme man einen Punct G auf DE so nahe bei E an, dass $GB - GA$ sich von BC beliebig wenig unterscheidet. Ziehen wir nun durch G die Parallele zu AB und rückt G auf der Parallelen nach der A zugewandten Seite fort, so wächst GB, während GA abnimmt, es muss also bald eine Stelle G' gefunden werden, wo $G'B - G'A = BC$, d. h. ein Curvenpunct. Diese Betrachtung bleibt, auf welcher Seite auch G zu E liegt, richtig.

Für die Ellipse ist die analoge Betrachtung einfacher und konnte daher dem Leser überlassen werden.

Wenn C der Berührungspunct der von A aus an den Leitkreis gezogenen Tangente ist, so bleibt die Mittelsenkrechte in ihrer Bewegung, die von der Bewegung des Punctes C abhängt, gewissermassen stationär. Der Curvenpunkt E liegt daher unendlich fern, wie sich auch aus dem Parallelismus von DE mit BC ergibt. Die Hyperbel besitzt also zwei unendlich ferne Puncte und zwei Tangenten, welche sie in diesen Puncten berühren, die Asymptoten.

Sei $CG \perp AG$, DE Mittelsenkrechte von AC und $EC \perp GC$.

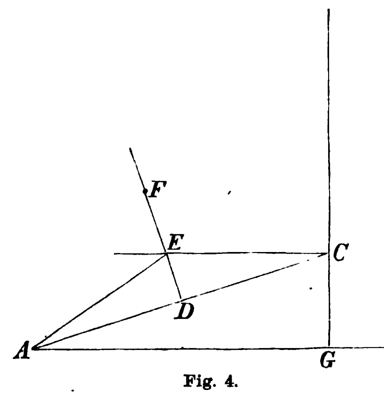


Fig. 4.

Dann ist $AE = EC$ und E Punct einer Parabel, deren Brennpunct A und deren Leitlinie CG ist. Ist F ein zweiter Punct von DE, so ist $FA = FC$ grösser als der Abstand des Punctes F von der Leitlinie. DE ist Tangente im Puncte E der Curve, deren Nachbarpuncte auf der A zugewandten Seite von DE liegen.

52. Während bei Ellipse und Hyperbel jede Gerade AC den Leitkreis noch in einem zweiten Puncte C' schneidet und so zu einer zweiten parallelen Tangente führt, hat die Parabel im eigentlichen Sinne keine parallelen Tangenten.

Diese Bemerkung ist von grosser Bedeutung. Sie scheidet Ellipse und Hyperbel einerseits von der Parabel andrerseits. Ellipse und Hyperbel unterscheiden sich durch Nichtexistenz oder Vorhandensein der Asymptoten. Da die letzteren nichts anderes sind als ein Paar zusammenfallender paralleler Tangenten, so sehen wir, dass die Betrachtung der parallelen Tangenten für alle drei Kegelschnitte den charakteristischen Unterschied angiebt. Also:

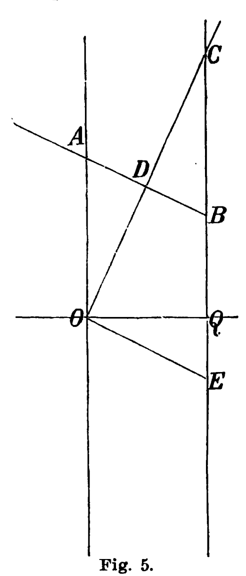


Fig. 5.

Parallele Tangenten existiren nicht. *Parabel.*

Parallele Tangenten können nie zusammenfallen. *Ellipse.*

Parallele Tangenten fallen zweimal zusammen. *Hyperbel.*

53. Gleichung der Parabel in Liniencoordinaten.

Sei O der Brennpunct, QC die Leitlinie, OC in D halbirt, $AB \perp OC$. $OA = u$, $QB = v$. Ziehen wir OE parallel AB, so ist das Dreieck COE

rechtwinklig, ferner $CB = AO = u$, $QE = u - v$, daher nach dem Satze vom rechtwinkligen Dreieck

$$(u + v)(u - v) = e^2. \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

Dies ist die Gleichung der Parabel.

54. Gleichung der Ellipse.

Sei A der eine Brennpunct, BC der durch A gehende Diameter des Leitkreises. O sei die Mitte von AB, Q die Mitte

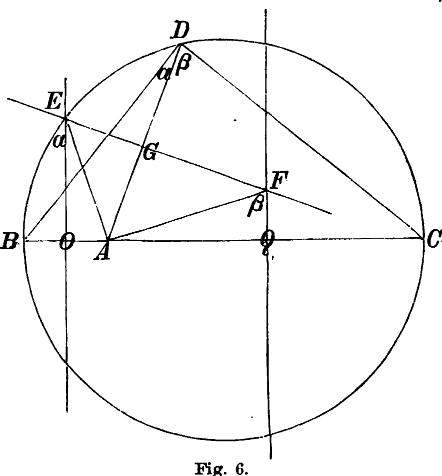


Fig. 6.

von AC, G die Mitte der willkürlichen AD. Dann ist $EF \perp AD$ Tangente der Ellipse, $EO = u$, $FQ = v$ ihre Coordinaten. Es ist $QO = e = r$, denn $2OA + 2AQ = 2r$. Nun ist $EA = EB = ED$, also E*) der Mittelpunct des um das Dreieck ABD beschriebenen Kreises, aus analogen Gründen F der Mittelpunct des um ADC beschriebenen Kreises. Daher sind die in der Figur mit gleichem Buchstaben α und β bezeichneten Winkel einander gleich und $\alpha + \beta = 90^0$, weil BDC Winkel im Halbkreise. Daher sind die Dreiecke EOA und AQF ähnlich, also

$$EO : OA = AQ : QF,$$

$$EO \, . \, QF = u \, . \, v = OA \, . \, AQ = \text{const.}$$

Um den Werth der Constanten zu ermitteln, bewirken wir, dass u und v einander gleich werden. Wir errichten also zu BC in A die Senkrechte, so wird $u \doteq v$. Es ist also $OA \, . \, AQ$ gleich dem vierten Theile der Potenz des Punctes A in Bezug auf

*) In der Figur ist BE nicht gezogen. Der Punct E liegt im Allgemeinen nicht auf dem Leitkreise. Vergl. Fig. 7.

den Leitkreis. Setzen wir $OA \,.\, AQ = b^2$, so ist die Grösse der halben senkrechten Sehne $2b$, daher der Abstand des Punctes A vom Mittelpuncte des Leitkreises $\sqrt{e^2 - 4b^2}$.

Die Gleichung der Ellipse lautet also:

$$u \,.\, v = b^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2.)$$

55. Zieht man DA durch bis zum zweiten Schnittpuncte mit dem Leitkreise, so kann man die zu EF parallele Tangente construiren. Der Abstand derselben ist gleich der Hälfte der ganzen Sehne DA. Hieraus folgt, dass von allen parallelen Tangenten die Axen den grössten, die zu den Axen senkrechten den kleinsten gegenseitigen Abstand haben, indem die grösste durch A gehende Sehne der Diameter, die kleinste die dazu senkrechte ist. Nennen wir diesen grössten Abstand $2a$, so ist also

$$e = 2a. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3.)$$

Asymptoten existiren nicht. Weil $\alpha + \beta = 90^0$, so erscheint das Stück EF der willkürlichen Tangente, welches von den Axen begrenzt wird, unter einem rechten Winkel von A aus gesehen.

a und b sind die sonst bekannten Halbaxen der Ellipse.

56. Gleichung der Hyperbel.

Die Buchstaben der umstehenden Figur bezeichnen genau die analogen Puncte wie in der vorigen.

Insbesondere ist A der Brennpunct, DA ein willkürlicher Strahl, FE die willkürliche Tangente.

Weil A, D, C auf der Peripherie des um F beschriebenen Kreises liegen, ist $ADC = 180^0 - \beta$.

Dieselben Dreiecke sind ähnlich; aber u und v haben entgegengesetzte Richtungen. Daher

$$u \,.\, v = -b^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4.)$$

Dies ist die Gleichung der Hyperbel.

57. Es ist wieder, weil $AO = OB$, $AQ = QC$ ist, $OQ = \frac{1}{2} BC = r = e$. $AO \,.\, AQ = \frac{1}{4} AB \,.\, AC$, wie vorhin. Also ist b^2 wieder der vierte Theil der Potenz des Punctes A in Bezug auf den Leitkreis. Construirt man die parallele Tangente zu EF, so erkennt man, dass der Abstand derselben kleiner ist

als OQ. Unter allen parallelen Tangenten haben also die Axen den grössten Abstand von einander; dieselben können unendlich nahe zusammenrücken, es existiren daher

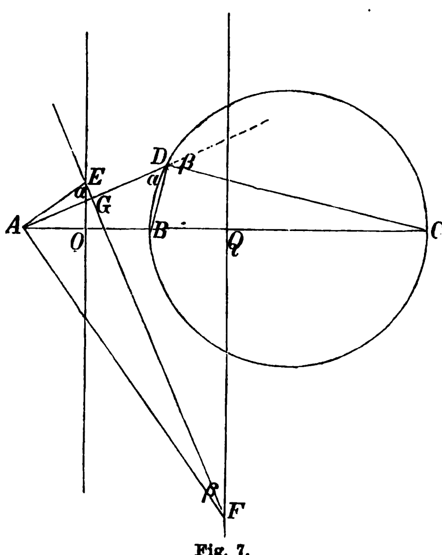


Fig. 7.

Asymptoten. Der Abstand des Punctes A vom Mittelpuncte des Leitkreises ist $\sqrt{r^2 + 4b^2}$, da der Abstand des Punctes A vom Berührungspuncte der Kreistangente, die durch A geht, gleich $2b$ ist. Denn $4b^2 = AB \cdot AC$. Setzen wir

$$e = 2a,$$

so haben wir die grosse Axe der Hyperbel.

Vom Brennpuncte aus gesehen erscheint das zwischen den Axen liegende Stück der beweglichen Tangente unter einem rechten Winkel.

Bei der gewöhnlichen, ursprünglichen Definition von Ellipse und Hyperbel bezeichnet r, also $2a$, die constante Summe, bez. Differenz der Abstände eines Curvenpunctes von den Brennpuncten.

Jedem Brennpuncte gehört ein besonderer Leitkreis an, die symmetrisch zu OQ liegen.

58. Zur Ermittlung der Coordinaten der Asymptoten suchen wir die Hyperbeltangente $u_0 + \alpha$, $v_0 + \alpha$ auf, welche der (u_0, v_0) parallel ist. Man hat also

$$u_0 v_0 = -b^2, \quad (u_0 + a)(v_0 + a) = -b^2.$$

Man findet also

$$u_0 + v_0 + a = 0.$$

Wenn nun a verschwinden soll, so muss $u_0 = -v_0$ sein, also nach Gl. (4.)

$$u_0 = -v_0 = \pm b.$$

Die Asymptoten kreuzen sich also auf der Mitte von OQ und bilden mit derselben einen Winkel γ, so dass

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b}{a}.$$

Die Coordinaten u_0, v_0 derjenigen Hyperbeltangente, welche von der parallelen den Abstand a hat, liefert die Gleichung:

$$u_0^2 + a u_0 - b^2 = 0.$$

Die Strecke a ist der in Richtung der Coordinaten gemessene Abstand.

59. Verschiebung des Coordinatensystems. Bei den Gleichungen für Ellipse und Hyperbel waren die Axen ein Paar paralleler Tangenten, nämlich die Tangenten in den Endpuncten der grossen Axe. Bei der Parabel war die eine Axe die Leitlinie, die andere ging parallel derselben durch den Brennpunct. Hiernach liegt es nahe, auch für die ersteren ein ähnliches System aufzustellen, wo die eine Axe die Tangente am Leitkreise ist und die andere durch den Brennpunct geht. Zu diesem Zwecke ist es erforderlich, allgemein die folgende Aufgabe zu lösen:

Wie kann man ein Coordinatensystem durch ein anderes ersetzen, welches aus dem vorigen durch Parallelverschiebung entsteht?

Möge der neue Punct O' vom früheren O um die Strecke p, der neue Punct Q' von Q um die Strecke q entfernt sein, wo beide in der als positiv angenommenen Richtung QO gezählt sind. Nennen wir den Abstand der neuen Axen e', so ist

$$e' - e = p - q.$$

Ferner hat man, wenn man die neuen Coordinaten der Geraden (u, v) durch u', v' bezeichnet,

$$u - v : e = u' - v' : e',$$
$$v' - v : q = u' - u : p.$$

Durch Auflösung dieser Proportionen findet man

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{p}{e'}\,v' + \frac{e-q}{e'}\,u', \\ v &= \frac{p+e}{e'}\,v' - \frac{q}{e'}\,u'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5.)$$

Ersetzen wir durch allgemeine Zeichen, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha u' + \beta v', \\ v &= \gamma u' + \delta v', \\ \alpha + \beta &= 1, \\ \gamma + \delta &= 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6.)$$

Die Gleichungen (6.) sind also diejenigen, welche eine Parallelverschiebung des Systems bewirken.

Sind die Coefficienten α, β, γ, δ gegeben, so findet man

$$p = \frac{1-\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}\,e, \quad q = \frac{\delta - 1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\,e, \quad e' = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\,e. \qquad (7.)$$

60. Wenden wir das Gesagte jetzt auf die Ellipse an, so muss in der Figur des §. 54 der Punct Q nach A, O nach B rücken. Es ist also $BO = OA = \frac{1}{2}e'$, mithin $QA = r - \frac{1}{2}e'$, also, $(r = e)$,

$$p = \tfrac{1}{2}e', \quad q = r - \tfrac{1}{2}e'.$$

Der Abstand des Punctes A vom Mittelpuncte des Leitkreises ergab sich §. 54 als $2\sqrt{a^2 - b^2}$, daher wegen $e = 2a = r$

$$BO = OA = \tfrac{1}{2}e' = a - \sqrt{a^2 - b^2},$$
$$b^2 = ae' - \tfrac{1}{4}e'^2 = \tfrac{1}{4}e'(2r - e').$$

Also liefert Gl. (5.)

$$u = \tfrac{1}{2}(v' + u'); \qquad v = \frac{(2r + e')\,v' - (2r - e')\,u'}{2e'}.$$

Daher mit Weglassung der Accente:

$$\begin{aligned} 2r(v^2 - u^2) + e(v+u)^2 &= e^2(2r - e), \quad \ldots \quad (8.) \\ r &= 2a, \\ e &= 2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung der Ellipse bezogen auf ein System, dessen U-Axe den Leitkreis berührt, dessen V-Axe durch den zugehörigen Brennpunct geht. Dieselben stehen zur grossen Axe der Ellipse senkrecht.

61. Für die Hyperbel wird in der Figur des §. 56 die

V-Axe nach A, also um das positive Stück $r + \frac{1}{2} e'$, die U-Axe nach B, also um die Strecke $\frac{1}{2} e'$, aber in entgegengesetzter Richtung verschoben. Daher ist

$$p = -\tfrac{1}{2} e', \qquad q = r + \tfrac{1}{2} e'.$$

Weil zugleich der Abstand von A zum Kreismittelpunct $\sqrt{r^2 + 4b^2}$, so ist der Abstand AB, also $e' = \sqrt{r^2 + 4b^2} - r$.

Demnach wird die Gleichung:

$$2r(v^2 - u^2) - e(v + u)^2 = e^2(2r + e) \quad . \quad . \quad (9.)$$

$$r = 2a,$$

$$e = 2\sqrt{a^2 + b^2} - 2a.$$

62. Stellen wir nun die drei Gleichungen zusammen, so wird:

$$\left.\begin{aligned} &v^2 - u^2 = e^2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \textit{Parabel.} \\ &v^2 - u^2 = e^2\left(1 - \frac{e}{2r}\right) - \frac{e}{2r}(v + u)^2 \ldots\ldots \textit{Ellipse.} \\ &v^2 - u^2 = e^2\left(1 + \frac{e}{2r}\right) + \frac{e}{2r}(v + u)^2 \ldots\ldots \textit{Hyperbel.} \end{aligned}\right\} \quad (10.)$$

Dies sind die drei Gleichungen der Kegelschnitte nach der Definition des §. 50.

r ist der Radius des Leitkreises, e der kleinste Abstand des Brennpuncts vom Leitkreise. Die V-Axe geht durch den Brennpunct. Nimmt man statt des kleinsten den grössten Abstand, so vertauscht sich e mit $2r - e$ bez. $2r + e$.

Nimmt man $r = \infty$, so gehen Ellipse und Hyperbel in die Parabel über. Für $e = r$ haben wir die Gleichung

$$4v^2 = r^2 + (u - v)^2.$$

Und diese bezeichnet nach §. 48, Gl. (23.) einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2} r$ und dem Mittelpuncte $v = 0$.

Für $e = 2r$ haben wir:

$$v(v + u) = 0.$$

Daher besteht die Ellipse aus dem Punctepaare $v = 0$, $v + u = 0$.

Wir können daher die betreffende Bemerkung des §. 49 dahin erweitern, dass bei einer Drehung um einen Punct des Leitkreises auch dieser Drehpunct als Curventheil anzusehen ist.

63. Da e in manchen Gleichungen nicht explicite vorkommt, so kann solchen Gleichungen eine andere geometrische Bedeutung durch blosse Änderung des e unterschoben werden.

Alle Folgerungen nun, die man aus solchen Gleichungen, ohne auf den Werth von e zurückzugreifen, gezogen hat, bleiben dann für die neue Figur bestehen. Hierin liegt ein bequemes Mittel, eine Menge von Eigenschaften, welche für eine specielle Curve geltend bekannt sind, auf andere, allgemeinere Curven ohne Rechnung zu übertragen.

Sei ein Coordinatensystem mit der Distanz e gegeben. Wir halten die V-Axe fest, verschieben die U-Axe aber parallel in die Entfernung e' von der V-Axe. Wenn nun eine Gerade die ursprünglichen Coordinaten in den Puncten A und B schneidet, so tragen wir von O', dem zweiten Grundpuncte des neuen Systems, $O'A' = OA$ ab und die Gerade $A'B$ hat in dem neuen System die Coordinaten u, v, ist aber von der Geraden AB im alten System verschieden. Dagegen hat sie im alten Systeme die Coordinaten (u', v) und es ist

$$u' - u : e' - e = v - u' : e,$$

oder

$$u = \frac{e'}{e} u' - \left(\frac{e'}{e} - 1\right) v'. \quad \ldots \quad (11.)$$

Nehmen wir nun an

$$F(u, v) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12.)$$

bedeute im alten System eine Curve, so bedeutet diese Gleichung im neuen Systeme ebenfalls eine Curve; aber eine von der früheren verschiedene, nämlich die Curve:

$$F\left(\frac{e'}{e} u - \left(\frac{e'}{e} - 1\right) v,\ v\right) = 0 \quad \ldots \quad (13.)$$

des alten Systems. Alle für (12.) nachgewiesenen Eigenschaften nun, welche nicht mit e im rechnerischen Zusammenhange stehen, gelten daher sofort für die allgemeinere Curve (13.).

Eine analoge Übertragung findet man, wenn man OA von O' aus in entgegengesetztem Sinne abträgt. Dann entsteht aus (12.) die Curve:

$$F\left(-\frac{e'}{e} u + \left(\frac{e'}{e} - 1\right) v,\ v\right) = 0. \quad \ldots \quad (14.)$$

60. Von dem Vorigen wollen wir für die Zeichnung der Ellipse und Hyperbel eine interessante Anwendung machen.

Die Gleichungen des Kreises und der Ellipse

$$uv = b^2$$

enthalten e nicht explicite. Wenn man daher einen Kreis zeichnet, an ihn zwei parallele Tangenten construirt, sie zur U- und V-Axe eines Coordinatensystems wählt, so kann man eine Ellipse in folgender Weise leicht zeichnen. Man ziehe an den Kreis eine Reihe (vielleicht zehn) Tangenten, bestimme davon u, v und trage dieselben nun in ein anderes System als neue Coordinaten einer entsprechenden Geraden ein. Die so entstehenden zehn neuen Geraden umhüllen nun eine Ellipse. Dieselbe erscheint als gedrücktes oder gedehntes Abbild des Kreises, jenachdem das e des neuen Systems kleiner oder grösser als der Durchmesser des Kreises ist.

Verfährt man dagegen so, dass die u, v der Kreistangenten in einander entgegengesetztem Sinne in das neue System eingezeichnet werden, so entsteht eine Hyperbel. Ist deren $e = 2r$, so steht die Hyperbel mit dem Kreise in besonders inniger Beziehung. Die zu den Axen senkrechten Kreistangenten, welche in jedem Falle (vergl. §. 58) bei dieser Deformation des Kreises zu Asymptoten der Hyperbel werden, sind in diesem Falle auch senkrecht zu einander.

Man nennt die Hyperbel, welche zum Kreise in dieser innigen Beziehung — gewissermassen ein entgegengesetzt gleiches Zerrbild — steht, die gleichseitige Hyperbel.

65. Zur Zeichnung der Parabel bietet ihre Gleichung (1.) §. 53 ein bequemes Mittel. Diese Gleichung lautet

$$u^2 - v^2 = e^2.$$

Man trage von Q aus gleiche Stücke v auf der V-Axe, etwa QB und QB' nach entgegengesetzter Richtung ab. Dann trage man auf der U-Axe die Strecken OB als OA und OA' in beiden Richtungen ab. So erhält man die vier Parabeltangenten AB, $A'B'$, AB' und $A'B$. Rückt der Punct B ins Unendliche, so werden die ersteren AB und $A'B'$ zu unendlich fernen Geraden, die letzteren $A'B$ und AB' zur Mittellinie (Scheiteltangente) des Systems. Die ersteren bestimmen das Bild der Curve von ihren Schnittpuncten mit der U-Axe bis ins Unendliche, die letzteren den übrigen endlichen Theil innerhalb der Axen. Für $v = 0$ findet der Übergang statt. Hier stehen AB und $A'B'$ auf einander senkrecht und haben in A und A' ihre Berührungspuncte.

Die verschiedenen A, A', B, B' liegen auf concentrischen Kreisen, welche um den Punct O beschrieben sind.

66. Ziehen wir vom imaginären Kreispuncte I an die Ellipse

$$u \,.\, v = b^2$$

die Tangenten, so erhalten wir als Gleichung von I:

$$u - v = ei,$$

daher als Coordinaten der zwei Tangenten:

$$v_1 = (-a + \sqrt{a^2 - b^2})\, i, \qquad u_1 = (a + \sqrt{a^2 - b^2})\, i,$$
$$v_2 = (-a - \sqrt{a^2 - b^2})\cdot i, \qquad u_1 = (a - \sqrt{a^2 - b^2})\, i$$

Die Coordinaten der ersten Tangente (v_1, u_1) befriedigen nun die Gleichung des reellen Punctes:

$$\frac{v}{u} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}. \quad \ldots\ldots \quad (15.)$$

Dieser Punct liegt auf der Verbindungslinie der Puncte O und Q, also auf der grossen Axe. Wie wir im §. 60 fanden, ist aber $OA = a - \sqrt{a^2 - b^2}$, also $AQ = a + \sqrt{a^2 - b^2}$. Ziehen wir daher durch A irgend eine Gerade, so genügen ihre Coordinaten der Gl. (15.), daher ist sie die Gleichung des Brennpuncts.

67. Wenn wir nun beachten, dass die Tangente vom imaginären Kreispuncte aus nur einen reellen Punct besitzen kann, so kann man daraus eine für allgemeine Curven gültige Definition des Brennpunctes ableiten. Um dies einzusehen, wird es hier am Orte sein, das Verhalten imaginärer Geraden und Puncte etwas genauer zu untersuchen.

Sei die imaginäre Gerade

$$\left.\begin{aligned} u &= p + qi, \\ v &= r + si, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16.)$$

gegeben. Dieselbe soll den reellen Punct:

$$Au + Bv + C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17.)$$

enthalten. Dann muss sein:

$$Ap + Br + C = 0, \qquad Aq + Bs = 0.$$

Hierdurch bestimmen sich die Verhältnisse $A : B$, $C : B$ unzwei-

deutig, die Gerade (16.) enthält also nur einen reellen Punct. Die Gleichung desselben ist

$$su - qv = sp - qr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18.)$$

Sei der imaginäre Punct:

$$(A + A'i)\,u + (B + B'i)\,v + C + C'i = 0 \quad . \quad (19.)$$

gegeben, so enthält derselbe nur eine reelle Gerade, nämlich die Verbindungslinie der beiden reellen Puncte:

$$\begin{aligned} Au + Bv + C &= 0, \\ A'u + B'v + C' &= 0. \end{aligned}$$

Ein reeller Punct $Au + Bv + C = 0$ dagegen enthält unzählig viele imaginäre Geraden $(p + qi,\ r + si)$, aber zu jeder auch die conjugirte $(p - qi,\ r - si)$, wie die resultirenden Gleichungen

$$\begin{aligned} Ap + Br + C &= 0, \\ Aq + Bs &= 0 \end{aligned}$$

beweisen. Ebenso ergiebt sich, dass jede reelle Gerade $(u_0,\ v_0)$ durch unzählig viele imaginäre Puncte geht, aber zu jedem

$$(A + A'i)u + (B + B'i)v + C + C'i = 0$$

auch durch den conjugirten

$$(A - A'i)u + (B - B'i)v + C - C'i = 0,$$

wie die resultirenden Gleichungen

$$\begin{aligned} Au_0 + Bv_0 + C &= 0, \\ A'u_0 + B'v_0 + C' &= 0 \end{aligned}$$

beweisen.

68. **Definition der Brennpuncte einer Curve.** Brennpuncte einer Curve sind die reellen Puncte der von einem der beiden imaginären Kreispuncte, welche auf der unendlich fernen Geraden liegen, an die Curve gezogenen Tangenten.

Da $u - v = ei$ mit der Curvengleichung $F(u,\ v)$ combinirt zu dem Resultate führen muss

$$\left.\begin{aligned} u &= p + (q + \tfrac{1}{2}e)i, \\ v &= p + (q - \tfrac{1}{2}e)i, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20.)$$

so erhalten wir als Gleichung eines Brennpuncts

$$u(q - \tfrac{1}{2}e) - v(q + \tfrac{1}{2}e) + pe = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (21.)$$

Zu demselben Resultate würde man gelangt sein, wenn man statt des Punctes I den Punct J genommen haben würde. Daher kann man auch sagen, dass zwei Tangenten vom I- und J-Puncte sich im Brennpuncte schneiden. Auch diese Eigenschaft kann man als Definition wählen und erhält, da von jedem der Kreispuncte zwei Tangenten ausgehen, im Ganzen vier Brennpuncte einer Ellipse. Die beiden andern sind aber imaginär.

69. Die beiden Brennpuncte der Ellipse haben die Gleichungen:

$$\frac{v}{u} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \frac{v}{u} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Die Abstände p_1, p_2 dieser Puncte von der Geraden (u, v) haben daher die Werthe:

$$p_1 = \frac{a(v + u) + \sqrt{a^2 - b^2}(v - u)}{\sqrt{4a^2 + (u - v)^2}},$$

$$p_2 = \frac{a(v + u) - \sqrt{a^2 - b^2}(v - u)}{\sqrt{4a^2 + (u - v)^2}}.$$

Mithin

$$p_1 p_2 = \frac{b^2(u - v)^2 + 4a^2uv}{(u - v)^2 + 4a^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22.)$$

Ist daher (u, v) Tangente der Ellipse, also $uv = b^2$, so ist:

$$p_1 p_2 = b^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23.)$$

Das Rechteck gebildet aus den Abständen der Brennpuncte von einer Tangente der Ellipse ist constant.

70. Die Brennpuncte der Hyperbel. Wenden wir das §. 68 Gl. (20.) gelehrte Verfahren an, so finden wir:

$$(p + (q + \tfrac{1}{2}e)i)(p + (q - \tfrac{1}{2}e)i) + b^2 = 0,$$
$$p^2 - (q + \tfrac{1}{2}e)(q - \tfrac{1}{2}e) + b^2 = 0,$$
$$pq = 0.$$

Die Annahme $q = 0$ führt zu der Gleichung $p^2 + \frac{1}{4}e^2 + b^2 = 0$, welche, da p reell sein soll, unerfüllbar ist. Für $p = 0$ finden wir

$$q^2 = \tfrac{1}{4}e^2 + b^2 = a^2 + b^2.$$

Die Gleichungen der beiden Brennpuncte werden daher

$$\left.\begin{aligned} (u - v)\sqrt{a^2 + b^2} - (u + v)a = 0, \\ (u - v)\sqrt{a^2 + b^2} + (u + v)a = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (24.)$$

Mithin das Product der Abstände von einer willkürlichen Geraden (u, v)

$$p_1 p_2 = \frac{4a^2uv - b^2(u-v)^2}{(u-v)^2 + 4a^2},$$

daher, wenn (u, v) Tangente ist,

$$p_1 p_2 = -b^2.$$

Demnach ist das Rechteck wieder constant, aber die Brennpuncte liegen auf verschiedenen Seiten der Tangente.

71. Der Brennpunct der Parabel folgt aus:

$$u^2 - v^2 = e^2,$$
$$u - v = ei.$$

Er liegt daher auch in gerader Linie mit $u + v = ei$, oder mit $2u = 0$;

$$u = 0$$

ist also, wie wir schon wussten, die Gleichung des Brennpuncts. Dasselbe folgt aus

$$(p + (q + \tfrac{1}{2}e)i)^2 - (p + (q - \tfrac{1}{2}e)i)^2 = e^2,$$
$$p = 0, \quad q = -\tfrac{1}{2}e.$$

Der Abstand einer Geraden (u, v) vom Brennpuncte ist also:

$$p = \frac{ue}{\sqrt{e^2 + (u-v)^2}}.$$

72. Die in (69.) und (70.) enthaltenen Lehrsätze können leicht umgekehrt werden und lauten dann so:

Sind zwei Puncte A und B gegeben und bewegt sich die Gerade L so, dass das Rechteck aus den Abständen der beiden Puncte von der Geraden constant bleibt ($= b^2$ oder $= -b^2$), so umhüllt die Gerade bei ihrer Bewegung entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel. Und zwar wird die Curve eine Ellipse, wenn die Puncte auf einer Seite der Geraden liegen, eine Hyperbel, wenn sie auf entgegengesetzten Seiten der Geraden liegen.

Diese Anschauung ist besonders geeignet, ein deutliches Bild der Gestalt der Curve zu geben. Wir verzichten aber auf detaillirte Ausführung.

In der That, man wähle im Falle der Hyperbel das Coordinatensystem so, dass die Gleichungen der gegebenen Puncte A

und B die Gl. (24.) des §. 70 werden. Dann folgt alsbald aus dem Ausdrucke für $p_1 p_2 = -b^2$,

$$u \,.\, v = -b^2,$$

d. h. die Curve ist eine Hyperbel, w. z. b. w.

72. Man bestimme die allgemeinste Gleichung der Parabel.

In der Figur des §. 53 gleitet der Punct D während der Bewegung der Geraden OC um O fortwährend auf einer Geraden, die in der Mitte von OQ senkrecht zu derselben steht.

Diese Eigenschaft der Parabel kann man als Definition verwenden und ihr folgende Fassung geben:

Bewegt sich eine Gerade um einen festen Punct und errichtet man zu ihr in allen ihren Schnittpuncten mit einer festen Geraden die Senkrechten, so umhüllen diese Senkrechten eine Parabel.

Oder: Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einer festen Geraden, während der eine Schenkel durch einen festen Punct läuft, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel.

Möge die feste Gerade die Coordinaten (u_0, v_0) haben, während der feste Punct die Gleichung hat

$$Au + Bv + C = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25.)$$

Man darf annehmen, dass dieselbe die Normalform besitzt. Denn wenn $A + B = 0$, wo diese nicht ertheilt werden kann, so liegt der Punct unendlich fern und die Curve degenerirt.

Ein willkürlicher Punct der Geraden (u_0, v_0) hat die Gleichung

$$D(u - u_0) + E(v - v_0) = 0 , \; . \; . \; . \; . \quad (26.)$$

wo auch $D + E = 1$ angenommen werden kann. Daher finden wir für die Coordinaten u', v' derjenigen Geraden, welche den beweglichen Punct (26.) mit dem festen Puncte (25.) verbindet:

$$u' - v' = -\frac{Du_0 + Ev_0 + C}{A - D}.$$

Nennen wir nun die Coordinaten der im Puncte (26.) zu (u', v') senkrechten Geraden (u, v), so muss dieselbe zunächst dem Puncte (26.) angehören und es muss nach §. 20

$$e^2 + (u - v)(u' - v') = 0$$

sein. Wenn wir daher aus

$$D(u - u_0 - v + v_0) + (v - v_0) = 0,$$
$$e^2 = \frac{D(u_0 - v_0) + v_0 + C}{A - D}(u - v)$$

die Grösse D eliminiren, so bleibt eine Gleichung zwischen (u, v) zurück, die Gleichung der Parabel.

Nach leichten Rechnungen findet man:

$$\begin{aligned} u^2(v_0 + C) - uv(2C + u_0 + v_0) + v^2(u_0 + C) \\ - u\{Ae^2 + C(u_0 - v_0)\} - v\{Be^2 - C(u_0 - v_0)\} \\ + e^2(Au_0 + Bv_0) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27.) \end{aligned}$$

Dies ist also die allgemeinste Gleichung der Parabel. $(A + B = 1.)$

Man beachte, dass die Summe der Coefficienten der Glieder zweiter Dimension, also der u^2, uv, v^2 Null ist; dass ferner die Summe der Coefficienten der Glieder erster Dimension, also der u, v den ausgezeichneten Werth $-e^2$ ergibt. Endlich, dass für $u = u_0$, $v = v_0$ die Gleichung (27) befriedigt ist. (u_0, v_0) ist also Tangente (Scheiteltangente) der Parabel. Hiervon überzeugt man sich besonders leicht, indem man (27.) die Form ertheilt:

$$\begin{aligned} (u - v)\{v_0 u - u_0 v + C(u - v - u_0 + v_0)\} \\ - e^2\{A(u - u_0) + B(v - v_0)\} = 0. \quad . \quad . \quad (28.) \end{aligned}$$

Lässt man u und v beide unendlich gross werden, so reducirt sich (28.) auf:

$$\left(\frac{u}{v} - 1\right)\left\{v_0 \cdot \frac{u}{v} - u_0 + C\left(\frac{u}{v} - 1\right)\right\} = 0.$$

Das Verschwinden des Klammerfactors liefert für $\frac{u}{v}$ einen solchen Werth, dass die betreffende Tangente (u', v')

$$u' = \infty, \qquad v' = \infty,$$
$$\frac{u'}{v'}(v_0 + C) = u_0 + C$$

den Axen parallel wird. Der erste Factor zeigt $\frac{u}{v} = 1$, also die unendlich ferne Gerade an. Dieselbe berührt also jede Parabel.

Geht (u_0, v_0) den Axen parallel, so wird

$$u_0 = \infty, \quad v_0 = \infty, \quad \frac{u_0}{v_0} = m,$$

und die Gleichung der Parabel wird:

$$(u-v)\{u-mv-C(m-1)\}+e^2(Am+B)=0. \quad (29.)$$

Nehmen wir $m=-1$ und $B=C=0$, so erhalten wir

$$u^2-v^2=e^2,$$

Die Gleichung des §. 53. Dagegen wird für $m=1$, wo die feste Gerade ins Unendliche rückt,

$$(u-v)^2+e^2=0,$$

d. h. die Parabel degenerirt in das System der beiden unendlich fernen Kreispuncte.

Nehmen wir den Brennpunct zum Puncte $u=0$, so wird $B=C=0$. Dann wird aus (28.)

$$(u-v)(v_0u-u_0v)-e^2(u-u_0)=0 \quad . \quad . \quad (30.)$$

und aus (29.)

$$(u-v)(u-mv)+e^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31.)$$

Fünfter Abschnitt.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

73. Wie wir im §. 72 rücksichtlich der Parabel und bereits früher im §. 21 rücksichtlich des Kreises erkannten, bestehen die Gleichungen dieser Curven aus mehr oder minder complicirten Ausdrücken zweiten Grades in (u, v). Da sich andrerseits die Ellipse und Hyperbel in den bisher untersuchten Formen ihrer Gleichungen ebenfalls unter diesem Gesichtspuncte befinden, so ist es zweckmässig, in umgekehrter Weise die allgemeine Gleichung zweiten Grades in u, v zu untersuchen, Wir fragen, welche Curven sie darstellt und durch welche Merkmale sich diese einzelnen Curven von einander unterscheiden. Sei also gegeben die Gleichung:

$$a_{11}u^2+2a_{12}uv+a_{22}v^2+2a_{13}u+2a_{23}v+a_{33}=0. \quad (1.)$$

Dieselbe ist eine Curve zweiter Classe. Denn stellen wir mit ihr einen Punct zusammen

$$Au+Bv+C=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

so erhalten wir im Allgemeinen zwei verschiedene Werthepaare u_1, v_1 und u_2, v_2, welche (1.) und (2.) genügen, also zwei Tangenten, welche vom Puncte (2.) an die Curve (1.) gelegt werden können.

Untersuchen wir zunächst, ob unsere Curve parallele Tangenten besitzt. Möge eine Tangente (u_0, v_0) gegeben sein, so wird die parallele die Coordinaten besitzen

$$u_0 + \alpha, \quad v_0 + \alpha.$$

Dann muss sein, wenn u_0, v_0 endliche Grössen sind:

$$(2a_{11}u_0 + 2a_{12}(u_0 + v_0) + 2a_{22}v_0 + 2a_{13} + 2a_{23}) + \alpha(a_{11} + 2a_{12} + a_{22}) = 0.$$

Daraus folgt, dass α eine endliche und bestimmbare Grösse sein wird, also im Allgemeinen zu jeder Tangente eine parallele gehört. Die einzige Ausnahme bildet der Fall, wo

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (3.)$$

Sind u_0, v_0 unendlich gross und ist ihr Quotient m endlich, so ändert sich hierin nichts. Denn es muss dann sein:

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}m + a_{22} = 0$$

und diese Gleichung liefert im Allgemeinen zwei Werthepaare für m, die auch zusammenfallen können. Also gehen den Axen parallel ebenfalls im Allgemeinen zwei Tangenten an die Curve. Im Falle aber die Gleichung (3.) erfüllt ist, wird ein Werth $m = 1$ erhalten — und dann haben wir die unendlich ferne Gerade als parallele Tangente.

Wir behaupten nun, dass im Falle des Bestehens der Gl. (3.) die Curve eine Parabel ist, indem es uns gelingen wird, ihre Gleichung mit der Gl. (27.) des §. 72 zu identificiren.

Zu diesem Zwecke erinnern wir uns der Bemerkungen, welche wir an (27.) geknüpft haben. Sei die Summe $a_{13} + a_{23}$ nicht gleich Null, so können wir durch Multiplication mit einem geeigneten Factor bewirken, dass

$$2a_{13} + 2a_{23} = -e^2 \quad \ldots \ldots \quad (4.)$$

wird. Dann dürfen wir also die Gleichungen (1.) und die (27.) des §. 72 vorläufig identificiren und finden:

$$\begin{aligned} a_{11} &= v_0 + C, \\ a_{22} &= u_0 + C, \\ -2a_{13} &= Ae^2 + C(u_0 - v_0), \\ a_{33} &= e^2(Au_0 + Bv_0). \end{aligned}$$

Dies sind die einzigen restirenden unabhängigen Gleichungen.

Die beiden noch übrigen für $2a_{12}$ und $2a_{23}$ sind erfüllt. Löst man dieselben auf, so ergibt sich zunächst die Scheiteltangente der Parabel, (u_0, v_0) (§. 72):

$$v_0 = \frac{a_{33} + (a_{22} - a_{11})(a_{11}a_{22} - a_{11}^2 + 2a_{13})}{(a_{22} - a_{11})^2 + e^2},$$

$$u_0 = \frac{a_{33} - (a_{22} - a_{11})(a_{11}a_{22} - a_{22}^2 + 2a_{23})}{(a_{22} - a_{11})^2 + e^2}.$$

Ferner die Coefficienten der Gleichung des Brennpuncts:

$$Ae^2 = \frac{(a_{22} - a_{11})(a_{33} - e^2 a_{11}) - 2a_{13}e^2}{(a_{22} - a_{11})^2 + e^2},$$

$$Be^2 = \frac{-(a_{22} - a_{11})(a_{33} - e^2 a_{22}) - 2a_{23}e^2}{(a_{22} - a_{11})^2 + e^2},$$

$$C = -\frac{a_{33} + 2a_{11}a_{23} + 2a_{22}a_{13}}{(a_{22} - a_{11})^2 + e^2}.$$

Wir sehen also, dass in diesem Falle alle fünf Grössen endliche und bestimmte Werthe haben, also eine ganz unzweideutig definirte Parabel vorliegt.

Findet aber die vorhin ausgeschlossene Beziehung statt, so haben wir

$$a_{13} + a_{23} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (4a.)$$

Dann lautet also unsere Gleichung:

$$a_{11}u^2 - (a_{11} + a_{22})uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}(u - v) + a_{33} = 0,$$

oder

$$(u - v)(a_{11}u - a_{22}v + 2a_{13}) + a_{33} = 0.$$

Dieselbe lässt sich sofort mit der Gleichung (29.) des §. 72 identificiren, indem man für m den Quotienten $\frac{m}{n}$ eintreten lässt. Dann muss sein:

$$a_{11} = n, \quad a_{22} = m, \quad 2a_{13} = -C(m - n), \quad a_{33} = e^2(Am + Bn).$$

Diese Gleichungen bestimmen alle Grössen. Nur, wenn $a_{11} = a_{22}$, wird diese Bestimmung illusorisch; aber dann degenerirt die Parabel in das System der beiden Puncte:

$$a_{11}(u - v)^2 + 2a_{13}(u - v) + a_{33} = 0.$$

Es bewirkt also das Bestehen der Gleichung (4a.), dass die Scheiteltangente der Parabel den Axen parallel wird.

74. Wir dürfen also von jetzt ab die Voraussetzung $a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0$ als nicht zutreffend annehmen.

Um nun die Untersuchung weiter zu führen, stellen wir uns die Aufgabe, die Brennpuncte der Curve (1.) zu bestimmen.

Wir versuchen in dieser Absicht, ob der Curvengleichung die Form ertheilt werden kann:

$$(Au + Bv + C)(Du + Ev + F)e^2 = m(e^2 + (u - v)^2). \quad (5.)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass

$$A + B = D + E = 1.$$

Da $a_{11} + 2a_{12} + a_{22}$ eine reelle von Null verschiedene Grösse ist, so lässt sich immer bewirken, dass wird:

$$e^2 = a_{11} + 2a_{12} + a_{22} \quad \ldots\ldots \quad (6.)$$

Die Coefficientenvergleichung bei (1.) und (6.) liefert nun die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} ADe^2 - m &= a_{11}, \\ BEe^2 - m &= a_{22}, \\ (AE + BD)e^2 + 2m &= 2a_{12}, \\ (AF + CD)e^2 &= 2a_{13}, \\ (BF + CE)e^2 &= 2a_{23}, \\ CF \,.\, e^2 - me^2 &= a_{33}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7.)$$

Nachdem man sich überzeugt hat, dass (6.) erfüllt ist, findet man

$$(F + C)e^2 = 2a_{13} + 2a_{23}, \quad \ldots\ldots \quad (8.)$$

$$CF \cdot e^2 = me^2 + a_{33}. \quad \ldots\ldots \quad (8a.)$$

Analog für A und D:

$$(A + D)e^2 = 2a_{12} + 2a_{11}, \quad \ldots\ldots \quad (9.)$$

$$AD \,.\, e^2 = m + a_{11}. \quad \ldots\ldots \quad (9a.)$$

Ist also m bestimmt, so erhält man sofort A und D, F und C als Wurzeln quadratischer Gleichungen. Allein diese Grössen sind von einander abhängig. Denn es ist

$$F + C = \frac{2(a_{13} + a_{23})}{e^2},$$

$$AF + CD = \frac{2a_{13}}{e^2}.$$

Hieraus ergiebt sich sofort:

$$\left.\begin{aligned} C(A - D)e^2 &= 2(\;\;Aa_{13} + Aa_{23} - a_{13}), \\ F(A - D)e^2 &= 2(-Da_{13} - Da_{23} + a_{13}). \end{aligned}\right\} \quad (9b.)$$

Demnach:

$$(C-F)(A-D)e^2 = 2(A+D)(a_{13}+a_{23}) - 4a_{13},$$

oder mit Hülfe von (9.)

$$(C-F)(A-D)e^4 = 4(a_{11}+a_{12})(a_{13}+a_{23}) - 4a_{13}e^2. \quad (10.)$$

Hieraus lässt sich nun eine Gleichung für m gewinnen. Denn aus (8.), (8a.) sowie aus (9.), (9a.) folgen Gleichungen für $A-D$ und $C-F$. Es ist:

$$(C-F)^2e^4 = 4(a_{13}+a_{23})^2 - 4e^4m - 4e^2a_{33},$$
$$(A-D)^2e^4 = 4(a_{12}+a_{11})^2 - 4e^2m - 4e^2a_{11}.$$

Daher die Gleichung für m

$$\{(a_{11}+a_{12})(a_{13}+a_{23}) - a_{13}e^2\}^2$$
$$= ((a_{13}+a_{23})^2 - e^4m - e^2a_{33})((a_{12}+a_{11})^2 - e^2a_{11} - e^2m). \quad (11.)$$

Dieselbe hätte man auch aus (9b.) ziehen können. Denn es ist

$$CF.(A-D)^2e^4$$
$$= 4\{-a_{13}^2 + (A+D)a_{13}(a_{13}+a_{23}) - AD(a_{13}+a_{23})^2\}.$$

Mithin aus (8a.)

$$(me^2+a_{33})\{(a_{11}+a_{12})^2 - e^2a_{11} - e^2m\}$$
$$= -a_{13}^2e^2 + 2a_{13}(a_{13}+a_{23})(a_{12}+a_{11}) - (a_{13}+a_{23})^2(a_{11}+m). \quad (11a.)$$

Die resultirende Gleichung ist folgende:

$$e^4m^2 - m\{e^2a_{12}^2 - e^2a_{11}a_{22} - e^2a_{33} + (a_{13}+a_{23})^2\}$$
$$+ a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0. \quad (12.)$$

Diese Gleichung besitzt immer zwei reelle Wurzeln, wie die folgende Untersuchung zeigen wird. Wir führen die Bezeichnung ein:

$$\varDelta = a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{22}a_{33}. \quad (13.)$$

Dann überzeugt man sich von der Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12})^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) = a_{11}\varDelta,\\
&(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = a_{22}\varDelta,\\
&\quad(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12})(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})\\
&\quad - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) = -a_{12}\varDelta.
\end{aligned}\right\} \quad (14.)$$

Daraus folgt durch Addition der ersten und Subtraction der mit zwei multiplicirten dritten:

$$\{(a_{11}+a_{12})a_{23} - (a_{12}+a_{22})a_{13}\}^2$$
$$- (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(e^2a_{33} - (a_{13}+a_{23})^2) = e^2\varDelta \quad (14a.)$$

oder:

$$\{(a_{11}+a_{12})a_{23}-(a_{12}+a_{22})a_{13}\}^2 - e^2\varDelta + (a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)^2 e^2 = (a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)\{a_{33}e^2 + a_{11}a_{22}e^2 - a_{12}{}^2 e^2 - (a_{13}+a_{23})^2\}.$$

Bilden wir jetzt die Discriminante der Gleichung (12.), so erhalten wir:

$$4e^4\varDelta + \{a_{33}e^2 + a_{11}a_{22}e^2 - a_{12}{}^2e^2 - (a_{13}+a_{23})^2\}^2.$$

Setzen wir nun für einen Augenblick

$$(a_{11}+a_{12})a_{23}-(a_{12}+a_{22})a_{13} = p,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = q,$$

so wird die Discriminante

$$\frac{(p^2 - e^2\varDelta + q^2e^2)^2 + 4e^4q^2\varDelta}{q^2}.$$

Dies ist aber eine positive Grösse, denn sie lässt sich darstellen als

$$\frac{(p^2 - e^2\varDelta - e^2q^2)^2 + 4e^2p^2q^2}{q^2}.$$

Hieraus folgen nun die beiden Werthe für m, nämlich:

$$2e^4m = \frac{-p^2+e^2\varDelta-e^2q^2 \pm \sqrt{(p^2-e^2\varDelta-e^2q^2)^2+4e^2p^2q^2}}{q}. \quad (15.)$$

Setzen wir diesen Werth in die für $(C-F)^2$ entwickelte Gleichung ein, so ergiebt sich, dass für den einen der beiden Werthe $(C-F)^2$ einen positiven, für den andern einen negativen Werth annimmt, nämlich

$$\frac{-p^2 + e^2\varDelta + e^2q^2 \pm \sqrt{(p^2 - e^2\varDelta - e^2q^2)^2 + 4e^2p^2q^2}}{q};$$

Daher ist im einen Falle $C-F$, also C und F und wegen (10.) auch A und D reell. Daher kann jede Curvengleichung (1.) auf eine und nur eine Weise reell in die Form (5.) gesetzt werden. Diese Form aber (§. 72) zeigt einen Kegelschnitt an und zwar eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem der brauchbare Werth von m positiv oder negativ ist. Die Brennpuncte sind

$$Au + Bv + C = 0,$$
$$Du + Ev + F = 0.$$

Der brauchbare Werth von m ist b^2 für die Ellipse, $-b^2$ für die Hyperbel. Der nicht brauchbare Werth von m führt zu zwei imaginären Brennpuncten, welche wir aber von unserer

Untersuchung ausschliessen. Würde man dieselben analog den im §. 69 durchgeführten Gedanken untersuchen, so würde man finden, dass die beiden Werthe von m bei der Ellipse die Grössen a^2, b^2 und bei der Hyperbel a^2, $-b^2$ repräsentiren. Das Product der beiden m ist positiv oder negativ, wenn Δ positiv oder negativ ist, wie Gleichung (12.) beweist. Sind beide m negativ, was nur bei $\Delta < 0$, $q > 0$ möglich ist, so ist der Kegelschnitt imaginär, weil die linke Seite von (1.) stets dasselbe Vorzeichen hat.

Noch ist der scheinbare Ausnahmefall zu untersuchen:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16.)$$

In diesem Falle verwandelt sich (12.) in

$$e^4 m^2 - m\,(a_{13}^2 + 2\,a_{13}a_{23} + a_{23}^2 - e^2 a_{33}) = (\sqrt{a_{11}}\,a_{23} - \sqrt{a_{22}}\,a_{13})^2.$$

Daher

$$e^4 m = \frac{(a_{13}+a_{23})^2 - e^2 a_{33} \pm \sqrt{((a_{13}+a_{23})^2 - e^2 a_{33})^2 + 4e^4(\sqrt{a_{11}}\,a_{23} - \sqrt{a_{22}}\,a_{13})^2}}{2}.$$

Die Wurzeln m sind also reell und zwar die eine positiv, die andere negativ. Man findet $(C - F)^2 = 4m$.

Es findet also wirklich keine Ausnahme statt.

Wenn $\Delta = 0$ ist, so wird $m = 0$. Der Kegelschnitt degenerirt zu einem Punctepaar.

75. Nachdem wir nun den Beweis geführt haben, dass jede Gleichung zweiten Grades zwischen u und v einen Kegelschnitt bedeutet, sollen die besonderen Arten, namentlich Ellipse und Hyperbel von einander unterschieden werden. Zu diesem Zwecke untersuchen wir die Asymptoten.

Wenn wir, wie es im §. 73 geschehen ist, zu einer gegebenen Tangente (u, v) die parallele ziehen, so erhalten wir eine Grösse α durch eine lineare Gleichung ausgedrückt; wenn der Fall der Asymptoten eintritt, so muss α verschwinden, weil dann zwei parallele Tangenten zusammenfallen.

Folglich erhalten wir:

$$(a_{11} + a_{12})u + (a_{12} + a_{22})v + a_{13} + a_{23} = 0. \quad . \quad (17.)$$

Dies ist die Gleichung eines Punctes, in welchem sich die Asymptoten schneiden.

Giebt man den Coordinaten zweier paralleler Tangenten die Form

$$u+\alpha,\quad v+\alpha,$$
$$u-\alpha,\quad v-\alpha,$$

so sehen wir, dass die Werthe (u, v) die Gleichung (17.) befriedigen. Die Gerade (u, v) ist aber die Mittellinie der beiden parallelen Tangenten. Daher ist (17.) die Gleichung des Mittelpuncts der Curve, durch den alle Mittellinien der parallelen Tangentenpaare laufen.

Der Mittelpunct (17.) ist zugleich die Mitte zwischen den Brennpuncten. Denn

$$(A+B)u+(B+E)v+C+F=0$$

ist mit (17.) laut (8.) und (9.) identisch.

Verbinden wir (17.) mit der Curvengleichung (1.), so erhalten wir

$$e^2(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)u^2+2e^2(a_{13}a_{22}-a_{23}a_{12})u+e^2(a_{22}a_{33}-a_{23}{}^2)$$
$$+\Delta=0,$$

und daraus für u und v die Werthe:

$$u=\frac{(a_{23}a_{12}-a_{13}a_{22})e^2+(a_{12}+a_{22})e\sqrt{\Delta}}{e^2(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)};$$
$$v=\frac{(a_{13}a_{12}-a_{23}a_{11})e^2-(a_{12}+a_{11})e\sqrt{\Delta}}{e^2(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2)}.$$

Dies sind also die Coordinaten der einen Asymptote. Wenn

$$a_{22}a_{11}-a_{12}{}^2=0,$$

so werden die Coordinaten der einen Asymptote unendlich, während die der andern endlich bleiben. Alsdann geht also eine Asymptote den Axen parallel, und dies ist die geometrische Deutung des Falles (16.).

Ist Δ eine positive Grösse, so haben wir die Hyperbel vor uns, denn beide Asymptoten sind reell.

Ist Δ negativ, so haben wir die Ellipse.

Die beiden Asymptoten werden aufeinander senkrecht stehen, wenn

$$e^2+(u-v)(u'-v')=0,$$

wo u, v und u', v' die Coordinaten derselben bedeuten. Dies ergibt mit Hülfe der Identität (14a.) die Gleichung:

$$e^2(a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2+a_{33})-(a_{13}+a_{23})^2=0. \quad . \quad (18.)$$

Dies ist also die Bedingung für eine gleichseitige Hyperbel.

Wie Gleichung (12.) zeigt, erhält man dann für m zwei entgegengesetzt gleiche Werthe. Dieselben liefert am einfachsten (15.) als

$$e^3 m = \pm \sqrt{p^2 + e^2 q^2},$$
$$e^2 m = \pm \sqrt{\Delta}.$$

In den Bezeichnungen des vorigen §. hat man für die Coordinaten u, v der Asymptoten:

$$u - v = \frac{p + e\sqrt{\Delta}}{q}.$$

Sollen nun diese Coordinaten dem unendlich fernen Kreispuncte angehören, so muss sein $p = 0$, $\Delta = -q^2$. Ist dies aber, so fallen die beiden Brennpuncte zusammen, weil $C - F$ und $A - D$ Null werden. Auch die Werthe für m fallen als $m = \frac{e^2}{q}$ zusammen. Wir haben einen Kreis vor uns und

$$a_{13}(a_{12} + a_{22}) = a_{23}(a_{11} + a_{12}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19.)$$

und wegen der Identität (14a.), da $\Delta = -q^2$,

$$e^2(a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 - a_{33}) + (a_{13} + a_{23})^2 = 0 \quad . \quad (19a.)$$

als Bedingung, dass ein Kreis vorliegt.

Für einen Kreis haben wir zwei Beziehungen, für die Parabel nur eine, nämlich Gl. (3.), ebenso für die gleichseitige Hyperbel nur eine, nämlich Gl. (18.), zwischen den Coefficienten der Curvengleichung (1.).

76. Sind fünf Tangenten gegeben: $(u_1, v_1), \ldots (u_5, v_5)$, so können die Quotienten der sechs Grössen $a_{11}, \ldots a_{33}$ linear bestimmt werden. Fünf Tangenten bestimmen einen Kegelschnitt unzweideutig. Da alle Parabeln, wie wir §. 72 sahen, die unendlich ferne Gerade berühren, so bestimmen vier Tangenten unzweideutig eine Parabel. Ebenso bestimmen vier Tangenten eine gleichseitige Hyperbel und drei Tangenten einen Kreis, aber nicht eindeutig.

Wenn wir in der Gleichung:

$$(Au + Bv + C)(Du + Ev + F)e^2 = m(e^2 + (u - v)^2) \quad (5.)$$

A, B, C, D, E, F festhalten, aber m alle Werthe durchlaufen lassen, so erhalten wir unzählige Kegelschnitte, welche dieselben Brennpuncte besitzen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} Au + Bv + C = 0, \\ Du + Ev + F = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20.)$$

Man nennt solche Kegelschnitte *confocale.*

Unter denselben befindet sich stets eine gleichseitige Hyperbel. Denn ihre Bedingungsgleichung (18.) führt zu der nachstehenden Bestimmung von m:

$$(F - C)^2 + e^2(A - D)^2 + 2m = 0. \quad \ldots \quad (21.)$$

Dies mit §. 22, Gl. (28.) verglichen lehrt, dass $-2m$ dem Quadrate der Brennpunctsdistanz gleicht.

Allgemein bestimmten wir im §. 54 den Abstand des Brennpuncts vom Mittelpuncte des Leitkreises der Ellipse, also den Abstand der beiden Brennpuncte zu $\sqrt{e^2 - 4b^2} = 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

Demnach ist

$$(A - D)^2 e^2 + (C - F)^2 = 4(a^2 - b^2). \quad \ldots \quad (22.)$$

Andrerseits sagt (5.) aus, dass das Rechteck aus den Abständen der Geraden (u, v) von den Brennpuncten (20.) den Werth m habe. Daher ist

$$m = b^2.$$

Setzt man die im §. 74 für $(A - D)^2$ und $(C - F)^2$ ermittelten Werthe ein, so folgt, dass $e^4(a^2 + b^2)$ dem Coefficienten von $-m$ in der Gleichung (12.) gleichkommt. Da also die eine Wurzel dieser Gleichung $m = b^2$ ist, so muss die andere $m = a^2$ sein. Hiermit ist also das von uns früher ohne Beweis Behauptete als richtig erwiesen. Zugleich ergiebt sich $e^4 a^2 b^2 = -\Delta$.

Für die Hyperbel wird

$$(A - D)^2 e^2 + (C - F)^2 = 4(a^2 + b^2); \qquad m = -b^2.$$

77. Als Übungsbeispiel untersuchen wir den Kegelschnitt

$$u^2 + v^2 - c^2 = 0. \quad \ldots\ldots \quad (23.)$$

Hier ist nach Multiplication mit $\frac{1}{2}e^2$, siehe §. 74, (6.)

$$a_{11} = \tfrac{1}{2}e^2, \quad a_{22} = \tfrac{1}{2}e^2, \quad a_{33} = -\tfrac{1}{2}c^2e^2; \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$
$$\Delta = \tfrac{1}{8}e^6c^2.$$

Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

Dieselbe hat den Mittelpunct $u + v = 0$.

Ihre Axen sind $b = \frac{e}{2}$, $a = \frac{c\sqrt{2}}{2}$.

Die Gleichungen der Brennpuncte sind:

$$u + v + \sqrt{e^2 + 2c^2} = 0, \quad u + v - \sqrt{e^2 + 2c^2} = 0.$$

Die Hyperbel wird gleichseitig, wenn $e^2 = 2c^2$.

Die a-Axe der Hyperbel ist die Mittellinie des Systems. Die Puncte $u = \pm c$, $v = \pm c$ sind Puncte der Hyperbel.

Sechster Abschnitt.

Tangente, Berührungspunct. Normale. Differentialausdruck des Bogenelementes und des Flächeninhaltes.

78. Sei gegeben die Curve

$$F(u, v) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

Stellen wir uns die Aufgabe, den Berührungspunct der Tangente (u_0, v_0) anzugeben.

Der Gleichung dieses Punctes werden nicht blos die Coordinaten (u_0, v_0), sondern auch die der benachbarten Tangente $u_0 + du_0$, $v_0 + dv_0$ genügen. Daher wird die fragliche Gleichung:

$$\frac{u - u_0}{v - v_0} = \frac{u_0 + du_0 - u_0}{v_0 + dv_0 - v_0} = \frac{du_0}{dv_0}. \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

Die Zuwächse du_0, dv_0 gehorchen nun aber der Beziehung:

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} du_0 + \frac{\partial F}{\partial v_0} dv_0 = 0,$$

daher wird die Gleichung des Berührungspunctes der Tangente (u_0, v_0) werden:

$$(u - u_0)\frac{\partial F}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial F}{\partial v_0} = 0. \quad \ldots \quad (3.)$$

So ist für den Kreis

$$F(u, v) = uv - r^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} = v_0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_0} = u_0,$$

also:

$$(u - u_0)v_0 + (v - v_0)u_0 = uv_0 + vu_0 - 2u_0v_0 = 0,$$

$$uv_0 + vu_0 - 2r^2 = 0,$$

übereinstimmend mit §. 30, Gl. (5.).

Wenn man die Bedingung, dass (u_0, v_0) Tangente der Curve (1.) sein soll, fallen lässt, so ist Gleichung (3.) Gleichung eines Punctes, der vermittels der Function $F(u, v)$ zu der Geraden

(u_0, v_0) in naher Beziehung steht. Man nennt diesen Punct den Pol der Geraden (u_0, v_0) in Bezug auf die Curve $F(u, v) = 0$. Doch siehe unten eine wichtige Bemerkung über die Form dieser Gleichung.

Die Gleichung des allgemeinen Kegelschnittes ist:

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0. \quad (4.)$$

Die Gleichung des Berührungspunctes auf der Tangente (u_0, v_0) wird daher:

$$(u - u_0)(a_{11}u_0 + a_{12}v_0 + a_{13}) + (v - v_0)(a_{12}u_0 + a_{22}v_0 + a_{23}) = 0.$$

Multipliciren wir aus, so erhalten wir

$$u(a_{11}u_0 + a_{12}v_0 + a_{13}) + v(a_{12}u_0 + a_{22}v_0 + a_{23})$$
$$- (a_{11}u_0^2 + 2a_{12}u_0v_0 + a_{22}v_0^2 + a_{13}u_0 + a_{23}v_0) = 0,$$

oder mit Benutzung der Curvengleichung:

$$u(a_{11}u_0 + a_{12}v_0 + a_{13}) + v(a_{12}u_0 + a_{22}v_0 + a_{23})$$
$$+ a_{13}u_0 + a_{23}v_0 + a_{33} = 0. \quad . \; . \; . \; . \quad (5.)$$

Man sieht, dass die Benutzung der Curvengleichung einen grossen Vortheil darbietet, indem der Ausdruck sich nicht blos vereinfacht, sondern auch bei Weitem mehr Symmetrie zeigt. Um diesen Vortheil allgemein bei der Gleichung des Berührungspunctes zu erhalten, bedient man sich der sogenannten homogenen Coordinaten. Schreiben wir (4.) in der Form

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}uw + 2a_{23}vw + a_{33}w^2 = 0, \quad (4a.)$$

so kann man (5.) und wie aus dem Satze über die homogenen Functionen folgt, die Gleichung (3.) allgemein schreiben:

$$u \cdot \frac{\partial F}{\partial u_0} + v \cdot \frac{\partial F}{\partial v_0} + w \cdot \frac{\partial F}{\partial w_0} = 0. \quad . \; . \; . \quad (6.)$$

Namentlich, wenn es sich um die Beziehungen von Pol und Polare handelt, werden wir die Gleichung nur in dieser Form verstehen.

Wir bemerken ausdrücklich, dass wir den homogenen Coordinaten durchaus keine geometrische Bedeutung beilegen, obwohl dies möglich ist. Für uns bedeutet w in (4a.) oder allgemein in $F(u, v, w) = 0$ bei geometrischer Deutung der Gleichung einfach die Einheit. Ebenso ist in (6.) sowohl w wie $w_0 = 1$ gesetzt zu denken. Es ist also die

sogenannte dritte Coordinate w für uns nur ein formales, zur Bequemlichkeit der Rechnung eingeführtes Symbol.

79. Wenn man in der Gleichung (5.) $u_0 = v_0$ nimmt und dann unendlich werden lässt, so wird (u_0, v_0) zur unendlich fernen Geraden. Die Gleichung (5.) verwandelt sich dann in

$$(a_{11} + a_{12})u + (a_{12} + a_{22})v + a_{13} + a_{23} = 0.$$

Dies ist nach §. 75 Gl. (17.) die Gleichung des Mittelpuncts. Der Pol der unendlich fernen Geraden ist also der Mittelpunct des Kegelschnittes.

Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (5.) durch das Symbol L, die linke Seite der Mittelpunctsgleichung durch M, so ist die Gleichung des Poles, welcher zu der Geraden

$$(u_0 + \alpha, \; v_0 + \alpha)$$

gehört,

$$L + \alpha M = 0.$$

Daher liegt der Pol auf der Geraden $L = 0$, $M = 0$. Bewegt sich also eine Gerade durch Parallelverschiebung, so durchläuft der Pol eine Gerade, welche durch den Mittelpunct des Kegelschnittes geht.

Gelangt die Gerade (u_0, v_0) durch Parallelverschiebung in den Mittelpunct des Kegelschnitts, so wird sie ein Diameter; die gleichfalls durch den Mittelpunct gehende Gerade, welche die Pole der Geraden (u_0, v_0) in deren verschiedenen Lagen enthält, ist auch Diameter der Curve und diese beiden in innigem Zusammenhange stehenden heissen conjugirte Diameter.

Übungsaufgaben. Gegeben ein Diameter; man suche die Coordinaten des conjugirten.

Man bestimme die Coordinaten einer Geraden, welche die Berührungspuncte zweier parallelen Tangenten verbindet.

Man bestimme die Länge eines Diameters.

Man zeige, dass wenn die Polare sich um einen Punct dreht, der Pol eine Gerade durchläuft.

Es ist zweckmässig, die Lösung dieser Aufgaben zunächst für die einfachsten Formen der Kegelschnittsgleichungen zu suchen. Vergl. §. 33 ff.

80. Eine Gerade, welche zur Tangente (u_0, v_0) in ihrem Berührungspuncte senkrecht steht, heisst Normale der Curve.

Sind ihre Coordinaten u, v, so müssen also die beiden Gleichungen erfüllt werden:

$$\left.\begin{aligned} e^2 + (u - v)(u_0 - v_0) = 0, \\ (u - u_0)\frac{\partial F}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial F}{\partial v_0} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7.)$$

Die erste zeigt an, dass die Normale zur Tangente senkrecht steht, die zweite, dass sie durch den Berührungspunct läuft.

81. Lassen wir u_0, v_0 alle Werthepaare, welche $F(u, v) = 0$ genügen, durchwandern, so umläuft die Tangente (u_0, v_0) die Curve. Die einzelnen Normalen (u, v) umhüllen eine neue Curve, die Evolvente der vorigen. Man findet also die Gleichung der Evolvente, wenn man aus (7.) mit Hülfe der Curvengleichung $F = 0$ die Grössen u_0, v_0 eliminirt.

Man suche die Gleichung der Evolvente der Ellipse.

Die Gleichungen, aus denen u_0, v_0 zu eliminiren sind, lauten:

$$e^2 + (u - v)(u_0 - v_0) = 0; \quad u_0 v_0 = b^2; \quad u v_0 + v u_0 = 2b^2.$$

Man findet zunächst:

$$\begin{aligned} u v_0 + v u_0 &= 2b^2, \\ u v_0 - v u_0 &= 2\sqrt{b^4 - b^2 uv} = 2b\sqrt{b^2 - uv}. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$u v_0 = b^2 + b\sqrt{b^2 - uv}, \quad v u_0 = b^2 - b\sqrt{b^2 - uv}.$$

Nun ist andrerseits

$$e^2 + (u - v)(u_0 - v_0) = 4a^2 + u u_0 + v v_0 - 2b^2 = 0.$$

Also

$$u^2 . v u_0 + v^2 . u v_0 = 2(b^2 - 2a^2) uv.$$

Oder

$$b^2(u^2 + v^2) + 2(2a^2 - b^2) uv = b\sqrt{b^2 - uv}(u^2 - v^2).$$

Nach vollzogener Quadrirung fällt ein Factor uv heraus und es bleibt

$$b^2(u + v)^2 \{(u - v)^2 + 8a^2 - 4b^2\} + 16(a^2 - b^2)^2 uv = 0. \quad (8.)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung der Ellipsenevolvente.

Eine noch bequemere Elimination bewirkt man durch die nachstehenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_0 u + u_0 v &= 2b^2, \\ u_0 u + v_0 v &= 2b^2 - 4a^2, \\ u_0 v_0 &= b^2. \end{aligned}$$

Man findet:

$$O = b^2(u^2 - v^2)^2 + 4\,\{b^2u + (2a^2 - b^2)v\}\,\{b^2v + (2a^2 - b^2)u\}. \quad (9.)$$

81. Aus den Gleichungen (7.) leitet man ab, wenn man zur Abkürzung einführt:

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} = p, \quad \frac{\partial F}{\partial v_0} = q,$$

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{-e^2q + (u_0p + v_0q)(u_0 - v_0)}{(p+q)(u_0 - v_0)}, \\ v' &= \frac{e^2p + (u_0p + v_0q)(u_0 - v_0)}{(p+q)(u_0 - v_0)}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (10.)$$

Die u', v' sind die Coordinaten der Normale im Curvenpuncte, dessen Tangente (u_0, v_0) ist.

82. Giebt man insbesondere der Curvengleichung die Form:

$$v = f(u), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11.)$$

so erhält die Gleichung des Berührungspunctes die Form:

$$\frac{v}{1 - f'} - \frac{uf'}{1 - f'} = \frac{v_0 - u_0f'}{1 - f'}. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12.)$$

In derselben ist kurz $f'(u_0)$ durch f' ersetzt. (u_0, v_0) ist die betrachtete Tangente. Die Gleichung hat die Normalform.

Als Coordinaten der Normale finden wir:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{-e^2 + (u_0 - v_0)(v_0 - u_0f')}{(1 - f')(u_0 - v_0)}, \\ v' &= \frac{-e^2f' + (u_0 - v_0)(v_0 - u_0f')}{(1 - f')(u_0 - v_0)}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (13.)$$

Bildet man nun die Gleichung

$$\frac{u - u'}{v - v'} = \frac{du'}{dv'},$$

so hat man den Punct, durch welchen die benachbarten Normalen (u', v') und $(u' + du', v' + dv')$ gehen, also den Krümmungsmittelpunct.

Die Ausrechnung liefert das folgende Resultat:

$$\begin{aligned} & u\left\{\frac{e^2f'}{(u_0 - v_0)^2} - f'' \cdot \frac{e^2 + (u_0 - v_0)^2}{(1 - f')^2(u_0 - v_0)}\right\} \\ & - v\left\{\frac{e^2}{(u_0 - v_0)^2} - f'' \cdot \frac{e^2 + (u_0 - v_0)^2}{(1 - f')^2(u_0 - v_0)}\right\} \\ & = e^2\,\frac{f''(e^2 + (u_0 - v_0)^2) - (1 - f')^2(v_0 - u_0f')}{(u_0 - v_0)^2(1 - f')^2}. \quad . \; . \quad (14.) \end{aligned}$$

Soll dieser Gleichung die Normalform ertheilt werden, so muss man sie durch

$$-\frac{(1-f')e^2}{(u_0-v_0)^2}$$

dividiren. Alsdann kann man direct durch (12.) und (14.) die Länge des Krümmungsradius im Berührungspuncte der Tangente (u, v) ausrechnen. Man erhält:

$$R = \frac{1}{e} \cdot \frac{f''(u)}{(1-f'(u))^3} \{e^2 + (u-v)^2\}^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad (15.)$$

Die Grösse $1 - f'(u)$ verschwindet nur, wenn $du = dv$. Dann sind die aufeinander folgenden Tangenten (u, v) und $(u + du, v + dv)$ einander parallel; wir haben also eine Asymptote (u, v) und ihren unendlich fern liegenden Berührungspunct vor uns.

Die Asymptoten der Curve (11.) liefert also die Gleichung

$$1 = f'(u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16.)$$

oder für die Curve $F(u, v) = 0$ die Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16a.)$$

Da die Gleichung $F(u, v) = 0$ vom n^{ten} Grade, die (16*a.*) vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, so erhält man ein Eliminationsresultat vom Grade $n(n-1)$. Eine Curve n^{ter} Classe hat also im Allgemeinen $n(n-1)$ Asymptoten oder $n(n-1)$ unendlich ferne Puncte.

83. Man kann das Obige leicht verallgemeinern. Die unendlich fernen Puncte erscheinen als Schnittpuncte der Curve mit der unendlich fernen Geraden. Wollen wir nun die Anzahl der Schnittpuncte der Geraden (u_1, v_1) mit der Curve $F(u, v) = 0$ bestimmen, so ist, wenn (u_0, v_0) die Tangente in einem solchen Puncte heisst,

$$(u_1 - u_0)\frac{\partial F}{\partial u_0} + (v_1 - v_0)\frac{\partial F}{\partial v_0} = 0,$$

$$F(u_0, v_0) = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen sagt aus, dass der Schnittpunct (u_1, v_1) mit (u_0, v_0) Berührungspunct der letzteren Geraden ist. Die Elimination mit Hülfe der homogenen Coordinaten bewirkt, dass

$$u_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial u_0} + v_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial v_0} + \frac{\partial F}{\partial w_0} = 0$$

wird. Diese Gleichung ist vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade, daher erzeugt sie in Verbindung mit $F(u, v) = 0$ ein Eliminationsresultat $n(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades.

Die Curven n^{ter} Classe sind im Allgemeinen $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

84. Wird in der Gleichung (15.) $f''(u)=0$,*) so folgt $R=0$. Wenn aber der Krümmungsradius einer Curve Null ist, so liegen die drei unendlich nahen Puncte, durch welche der Krümmungskreis geht, etwa derartig, dass die Entfernung der beiden äusseren von einander verschwindend klein gegen den Abstand derselben vom mittleren gedacht werden kann. Die analytische Erklärung der Spitze liefert die folgende Betrachtung

Angenommen, es sei $f''(u_0) = 0$, $v_0 = f(u_0)$. Dann ist:

$$v - v_0 = (u - u_0) f'(u_0) + \tfrac{1}{6} (u - u_0)^3 \cdot f'''(u_0) + \cdots$$

Die Gleichung der Spitze selbst wird

$$(v - v_0) = (u - u_0) f'(u_0).$$

In einem gewöhnlichen Puncte hat die Curvengleichung die Entwicklung:

$$\begin{aligned} v - v_0 = (u - u_0)f'(u_0) &+ \tfrac{1}{2} (u - u_0)^2 f''(u_0) \\ &+ \tfrac{1}{6} (u - u_0)^3 f'''(u_0) + \cdots \end{aligned}$$

Stellt man dieselbe mit dem beliebigen Puncte der Geraden (u_0, v_0), mit

$$v - v_0 = m(u - u_0)$$

zusammen, so sieht man, dass das Werthepaar $v - v_0$, $u - u_0$ nur einfach ist. Durch irgend einen Punct geht eine Tangente der Curve. Stellt man die Curvengleichung aber mit dem Puncte

$$(v - v_0) = (u - u_0)f'(u_0)$$

zusammen, so wird die Division durch $(u - u_0)^2$ ausführbar. Das Werthepaar $v = v_0$, $u = u_0$ ist doppelt, durch den fraglichen Punct gehen zwei zusammenfallende Tangenten, er ist Berührungspunct. Aus dieser Betrachtung folgt, dass die Spitze als ein Punct der Curve erklärt werden kann, durch welchen drei zusammenfallende Tangenten gehen.

---

*) Ist die Gleichung der Curve in Cartesischen Punctcoordinaten $y=f(x)$, so haben wir für $f''(x) = 0$ einen Inflexionspunct. Diese analytische Gleichförmigkeit scheint bemerkenswerth.

Drei benachbarte Tangenten laufen durch einen Punct, die Spitze.

Mithin steht die Spitze dem Inflexionspunct, wo drei benachbarte Puncte in gerader Linie liegen, polar gegenüber.

Jede Curve n^{ter} Classe, wenn $n > 2$, hat Spitzen. Dieselben sind also keine Singularität für diese Curven.

85. Wenn wir die Anzahl der Spitzen einer Curve n^{ter} Classe bestimmen wollen, so ist dies eine Untersuchung, die mit dem besonderen Charakter unseres Systems in keiner Beziehung steht. Dennoch mag die Frage der Vollständigkeit wegen Beantwortung finden.

Es ist im Allgemeinen unmöglich, eine Curvengleichung in die Form $v = f(u)$ zu setzen und dann $f''(u)$ explicite zu bilden.

Beachten wir aber, dass $f''(u)$ die zweite Ableitung von v in Bezug auf die Urvariable u bedeutet, so hat man aus

$$F(u, v) = 0$$

zunächst:

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}.$$

Leitet man nun nochmals ab, so erhält man statt $f'(u) = 0$ die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0. \quad (17.)$$

Diese Gleichung eignet sich aber noch nicht zur Abzählung des Grades der Endgleichung. Denn wenn $F(u, v) = 0$ vom n^{ten} Grade ist, so wird die linke Seite der Gleichung (17.) vom Grade $2(n-1) + n - 2 = 3n - 4$. Folglich müsste für den Kegelschnitt das Eliminationsresultat vom vierten Grade sein, während der Kegelschnitt doch gar keine Spitzen besitzt, da nicht drei Tangenten durch einen Punct laufen können. Es muss also (17.) mit Hülfe der Gleichung $F(u, v) = 0$ sich umformen lassen. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$U_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \quad U_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}, \quad U_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2},$$

$$U_{13} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w}, \quad U_{23} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w}, \quad U_{33} = \frac{\partial^2 F}{\partial w^2}.$$

Dann ist zunächst:

$$U_{11}u^2 + 2U_{12}uv + U_{22}v^2 + 2U_{13}uw + 2U_{23}vw + U_{33}w^2 = 0.$$

Ferner:

$$(n-1)\cdot\frac{\partial F}{\partial u} = u\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + v\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + w\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w},$$

also

$$(n-1)\frac{\partial F}{\partial u} = u\,.\,U_{11} + v\,.\,U_{12} + w\,.\,U_{13},$$

$$(n-1)\frac{\partial F}{\partial v} = u\,.\,U_{12} + v\,.\,U_{22} + w\,.\,U_{23}.$$

Führt man dies in (17.) ein, so erhält man:

$$U_{11}U_{22}U_{33} + 2U_{12}U_{13}U_{23} - U_{11}U_{23}^2 - U_{22}U_{13}^2 - U_{33}U_{12}^2 = 0. \quad (18.)$$

Diese Gleichung ist vom Grade $3(n-2)$ und repräsentirt eine Curve, welche die *Hesse*'sche Curve genannt wird. Für den Kegelschnitt sagt (18.) aus, dass er in zwei Puncte zerfällt.

Die Anzahl der Spitzen beträgt also bei einer Curve n^{ter} Classe im Allgemeinen $3n(n-2)$.

86. Das Bogenelement.

Die Gleichung des Berührungspunctes an der Tangente (u_0, v_0) lautet in der Normalform:

$$\frac{v}{1-f'(u_0)} - \frac{u\,.\,f'(u_0)}{1-f'(u_0)} = \frac{v_0 - u_0\,.\,f'(u_0)}{1-f'(u_0)},$$

wenn die Gleichung der Curve

$$v = f(u)$$

heisst. Daher findet man die Gleichung des nächsten Punctes, welcher Berührungspunct an der Tangente $(u_0 + du_0, v_0 + dv_0)$ ist, als:

$$\frac{v}{1 - f'(u_0) - f''(u_0)\,.\,du_0} - \frac{uf'(u_0 + du_0)}{1 - f'(u_0 + du_0)}$$
$$= \frac{v_0 + dv_0 - (u_0 + du_0)f'(u_0 + du_0)}{1 - f'(u_0 + du_0)}.$$

Demnach ergiebt sich ds, als Abstand dieser beiden benachbarten Curvenpuncte, aus der Gleichung:

$$ds^2 = \left(d\frac{1}{1-f'(u_0)}\right)^2 e^2 + \left(d\frac{v_0 - u_0 f'(u_0)}{1-f'(u_0)}\right)^2,$$

oder ausgeführt mit Auslassung des Index:

$$ds = \frac{f''(u)}{(1-f'(u))^2}\sqrt{c^2 + (u-v)^2}\,.\,du. \quad . \quad . \quad (19.)$$

Nehmen wir als Beispiel den Kreis, so finden wir

$$e = 2r, \quad v = \frac{r^2}{u}, \quad f'(u) = -\frac{r^2}{u^2}, \quad f''(u) = \frac{2r^2}{u^3},$$

$$ds = 2\,\frac{r^2}{r^2+u^2}\cdot du,$$

daher

$$s = 2r \quad \text{arctg}\left(\frac{a}{r}\right),$$

wenn man den Bogen vom Puncte $u = 0$ aus bis zum Berührungspuncte der Tangente $u = a$ zählt.

Stellt man den Ausdruck für R mit dem für ds gefundenen zusammen, so ergiebt sich das Resultat:

$$\frac{ds}{R} = \frac{e\,du - dv}{e^2 + (u-v)^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20.)$$

Dies Resultat lässt sich auch geometrisch leicht bestätigen.

87. **Das Flächenelement.**

Der Abstand des willkürlichen Punctes

$$L = Au + Bv + C = 0,$$

dessen Gleichung die **Normalform** haben möge, von der Tangente (u, v) ist

$$e \cdot \frac{Au + Bv + C}{\sqrt{e^2 + (u-v)^2}}.$$

Wir erhalten nun das Flächenelement $d\varphi$, wenn wir diesen Abstand mit dem halben Bogenelemente multipliciren. Daher:

$$d\varphi = \tfrac{1}{2}\,\frac{Au + Bv + C}{(1 - f'(u))^2}\,e\,.\,f''(u)\,.\,du\,, \quad . \quad . \quad . \quad (21.)$$

wo die Curvengleichung ist

$$v = f(u).$$

Im Allgemeinen ist es zweckmässig, den beliebigen Punct $L = 0$ als **Berührungspunct** einer **Tangente** (u_0, v_0) anzunehmen. Dann erscheint φ als **Segment** begrenzt von der Curve und der zu den Tangenten (u_0, v_0) und (u, v) gehörigen Berührungssehne.

Durch theilweise Integration wird aus (21.) allgemein:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\,(Au + Bv + C)\cdot\frac{e}{1 - f'(u)} - \frac{e}{2}\int\frac{A\,du + B\,dv}{1 - f'(u)},$$

daher in dem vorhin gekennzeichneten Falle:

$$\varphi = \frac{e}{2} \cdot \frac{Au + Bv + C}{1 - f'(u)} + \frac{e}{2} \int\limits_{u_0}^{u} \frac{f'(u_0) - f'(u)}{(1 - f'(u_0))(1 - f'(u))} \cdot du, \quad (22.)$$

da in diesem Falle der erste Summand für die untere Integrationsgrenze u_0 verschwindet.

Nehmen wir als Beispiel den Kreis und rechnen vom Puncte $u = 0$ aus, so wird:

$$\varphi = \frac{ru}{1 + \frac{r^2}{u^2}} - \int \frac{r}{1 + \frac{r^2}{u^2}} \cdot du,$$

oder:

$$\varphi = -r^2 \frac{ru}{r^2 + u^2} + r^2 . \operatorname{arctg} \frac{u}{r}$$

Man bestätigt leicht geometrisch dies Resultat, wobei zu beachten, dass der Abstand des Centrums von der das Segment begrenzenden Berührungssehne $\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + u^2}}$ und die Berührungssehne $2 \frac{ru}{\sqrt{r^2 + u^2}}$ ist.

Siebenter Abschnitt.

Einige Beispiele höherer Curven.

88. Bevor wir zur Behandlung derselben schreiten, mag erwähnt werden, dass wir der Vollständigkeit wegen einige Singularitäten analytisch bestimmen werden, obschon die Behandlung derselben mit unserm speciellen System in keiner näheren Beziehung steht. Man könnte daher die betreffenden Discussionen ebensogut an manchem andern Liniencoordinatensysteme vortragen.

Zunächst behandeln wir die Doppeltangente.

Sei die Gleichung unserer Curve:

$$F(u, v) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (1.)$$

In der Nähe der Tangente (u_0, v_0) können wir für die benachbarte Tangente (u, v), deren Coordinaten sich von u_0, v_0 so wenig unterscheiden, dass der Convergenzbereich der Reihe nicht verlassen wird, die folgende Entwicklung angeben:

$$F(u - u_0 + u_0,\ v - v_0 + v_0) = F(u_0, v_0) + (u - u_0)\frac{\partial F}{\partial u_0}$$
$$+ (v - v_0)\frac{\partial F}{\partial v_0} + \tfrac{1}{2}(u - u_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u_0^2} + (u - u_0)(v - v_0)\frac{\partial^2 F}{\partial u_0\, \partial v_0}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(v - v_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v_0^2} + \cdots$$

Die Gleichung:

$$(u - u_0)\frac{\partial F}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial F}{\partial v_0} = 0 \quad . \ . \ . \quad (2.)$$

stellt einen Punct dar und zwar, wie wir wissen, den Berührungspunct der Tangente (u_0, v_0). Da (2.) mit (1.) combinirt $u - u_0$ als zweifache Wurzel erscheinen lässt, so ist (2.) ein Punct, von dem aus nur $n - 2$ Tangenten an die Curve gehen, die von (u_0, v_0) im Allgemeinen verschieden sind.

Wenn aber $\frac{\partial F}{\partial u_0}$ und $\frac{\partial F}{\partial v_0}$ für eine Tangente (u_0, v_0) beide verschwinden, so existirt (2.) nicht mehr. Zunächst muss bemerkt werden, dass solche Werthe u_0, v_0, für welche gleichzeitig

$$F(u_0, v_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_0} = 0, \quad . \ . \quad (3.)$$

oder, wie man sofort sieht, für welche

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w_0} = 0, \quad . \ . \ . \quad (3.)$$

im Allgemeinen nicht vorhanden sind. Denn wir haben zu ihrer Bestimmung drei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten u_0, v_0.

Es muss also eine besondere Beziehung zwischen den Coefficienten von $F(u, v)$ vorhanden sein, damit die Gleichungen (3.) erfüllt sind.

Wir haben hier also eine Singularität vor uns. Suchen wir ihren geometrischen Charakter zu ergründen.

Zur Bestimmung der Nachbarn (u, v) der Tangente (u_0, v_0) haben wir die quadratische Gleichung:

$$(u - u_0)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u_0^2} + 2(u - u_0)(v - v_0)\frac{\partial^2 F}{\partial u_0\, \partial v_0}$$
$$+ (v - v_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial v_0^2} = 0. \quad . \ . \ . \ . \quad (4.)$$

Dieselbe wird nur dann illusorisch, wenn die drei zweiten Ableitungen verschwinden. Dies wird im Allgemeinen nicht der Fall sein und können wir ihn daher als eine noch weit höhere Singularität einstweilen ausschliessen.

Die Gleichung (4.) zerfällt in zwei lineare von der Form:

$$\left.\begin{aligned} a_1(u-u_0)+b_1(v-v_0)=0\,, \\ a_2(u-u_0)+b_2(v-v_0)=0\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5.)$$

Beide stellen Puncte dar, welche auf der Geraden (u_0, v_0) liegen. Combiniren wir einen derselben mit der Curvengleichung, so resultirt $u - u_0 = 0$ als dreifache Wurzel, wodurch also ausgesagt wird, dass von diesem Puncte ausser (u_0, v_0) sich nur $n - 3$ Tangenten an die Curve ziehen lassen.

Wir haben eine Tangente mit zwei Berührungspuncten, eine Doppeltangente vor uns.

89. Wie Gl. (17.) des §. 85 beweist, ist für die Doppeltangente auch die Gleichung erfüllt, welche uns die Spitzen der Curve lieferte.

Dasselbe ist aber auch für Gl. (18.) der Fall. Da nämlich die drei ersten Ableitungen nach u, v, w verschwinden, so hat man:

$$\begin{aligned} u\,.\,U_{11}+v\,.\,U_{12}+w\,.\,U_{13}=0\,, \\ u\,.\,U_{12}+v\,.\,U_{22}+w\,.\,U_{23}=0\,, \\ u\,.\,U_{13}+v\,.\,U_{23}+w\,.\,U_{33}=0\,. \end{aligned}$$

Durch Elimination der u, v, w folgt hieraus die Gleichung (18.) Demnach enthalten die $3n(n-2)$ Werthepaare, welche aus der Combination von (18.) mit $F(u, v) = 0$ folgen, nicht blos die Coordinaten der Tangenten in den Spitzen, sondern auch die Coordinaten der Doppeltangenten. Demnach erniedrigt sich die Anzahl der Spitzen, wenn Doppeltangenten vorhanden sind, und zwar, wie gezeigt werden kann, jedesmal um sechs Einheiten für jede Doppeltangente der Curve.

Werden die beiden Gleichungen (5.) identisch, so muss sein

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.)$$

Dann rücken also die beiden Berührungspuncte der Doppeltangente in einen zusammen; von ihm aus gehen noch $n - 3$ Tangenten an die Curve.

90. Die Curve

$$(v - v_0)^2 = (u - u_0)^2 \cdot \psi(u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.)$$

wo $\psi(u)$ die Entwicklung

$$\psi(u) = a_0^2 + a_1(u - u_0) + a_2(u - u_0)^2 + \cdots$$

hat und a_0 nicht Null ist, hat die Tangente (u_0, v_0) zur Doppeltangente. Die Berührungspuncte derselben haben die Gleichungen:

$$v - v_0 = \pm a_0(u - u_0).$$

Dies gilt allgemein, wie Gleichung (4.) beweist. Ist (u_0, v_0) eine Doppeltangente, so hat man für die Nachbartangenten zwei völlig verschiedene Entwicklungen, etwa

$$v - v_0 = a_0(u - u_0) + a_1(u - u_0)^2 + \cdots,$$

$$v - v_0 = b_0(u - u_0) + b_1(u - u_0)^2 + \cdots \quad .$$

Im Falle der Inflexion ist der Coefficient $a_0 = 0$ und die beiden Entwicklungen sind durch ein Wurzelvorzeichen verschieden. In der That, betrachten wir die Curve

$$(v - v_0)^2 = (u - u_0)^3 \cdot \psi(u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.)$$

wo $\psi(u)$ für $u = u_0$ nicht verschwindet und nicht unstetig wird, so ist

$$F(u, v) = (v - v_0)^2 - (u - u_0)^3 \cdot \psi(u).$$

Man erkennt zunächst, dass die Bedingung (6.) erfüllt ist, da man hat

$$\frac{\partial F}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_0^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u_0 \, \partial v_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v_0^2} = 2.$$

Für die Doppeltangente hat man in den zwei Paaren der Berührungspuncte vier Schnittpuncte der Curve mit der Geraden (u_0, v_0). Da für den Inflexionspunct diese vier Puncte zusammenrücken, so könnte es scheinen, als ob die Inflexionstangente die Curve in vier zusammenfallenden Puncten schnitte. Wir werden nachweisen, dass dies nicht eintrifft, sondern im Allgemeinen die Curve von der Inflexionstangente nur in drei zusammenfallenden Puncten geschnitten wird. So lange die Tangente die Curve nur in zwei zusammenfallenden Puncten schneidet, liegt die Curve ganz auf einer Seite der Tangente; dasselbe ist der Fall bei vier, sechs u. s. w. Schnittpuncten. Dagegen liegt die Curve bei drei, fünf u. s. w. Schnittpuncten auf verschiedenen

Seiten der Tangente. Daher muss die Tangente, welche die Curve durch Umwälzung beschreibt, in einem solchen Puncte den Sinn ihres Umlaufs ändern, sie muss in demselben stationär werden. Dies wird sich analytisch dadurch kennzeichnen, dass u für die Inflexionstangente ein Maximum oder Minimum wird, wenn wir den Bogen zur unabhängigen Variablen nehmen. Dies ist nun in der That der Fall. Denn aus §. 86 Gl. (19.) folgt:

$$\frac{du}{ds} = \frac{(1-f'(u))^2}{f''(u)} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^2+(u-v)^2}},$$

$$-\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{(1-f'(u))^3}{f''(u)(e^2+(u-v)^2)} \left\{ 1 + \frac{(1-f'(u)).f'''(u)}{f''(u)^2} - \frac{(1-f'(u))^2(u-v)}{f''(u)(e^2+(u-v)^2)} \right\}.$$

Nun hat man aber nach Gl. (8.) die Entwicklung:

$$f(u) = v_0 + a_0(u-u_0)^{\frac{3}{2}} + a_1(u-u_0)^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Setzt man ein, so erhält man für $\frac{du}{ds}$ den Werth Null, für $\frac{d^2u}{ds^2}$ den Werth $\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{a_0^2}$, wenn $u = u_0$.

Bei der hier gewählten Zeichenbestimmung hat man also stets ein Minimum vor sich.

Der Inflexionspunct hat die Gleichung $v = v_0$.

91. Gleichung der Parallelcurve. Soll die Tangente (u', v') einer Curve im Abstande k die Parallele (u, v) erhalten, so muss sein, wie ähnliche Dreiecke lehren:

$$\frac{u'-u}{k} = \frac{\sqrt{e^2+(u-v)^2}}{e} = \frac{v'-v}{k}.$$

Ist daher die Gleichung der Curve $F(u, v) = 0$, so lautet die der Parallelcurve:

$$F\left(u + \frac{k}{e}\sqrt{e^2+(u-v)^2},\quad v + \frac{k}{e}\sqrt{e^2+(u-v)^2}\right) = 0. \quad (9.)$$

Dieselbe ist vom Grade $2n$ und führt zu denselben Puncten als Brennpuncten, welche der ursprünglichen Curve zukommen. Man kann daher ein System paralleler Curven als ein confocales auffassen. Dieses Verhalten gilt selbstverständlich nicht umgekehrt.

Die Gleichung der Parallelcurve der Ellipse lautet:

$$\{4a^2(uv-b^2)+k^2(4a^2+(u-v)^2)\}^2 = 4a^2k^2(u+v)^2(4a^2+(u-v)^2).$$

92. **Es soll die Curve untersucht werden:**

$$av^2 = u^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10.)$$

Der Berührungspunct hat die Gleichung:

$$2av_0 v - 3u_0^2 u + u_0^3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11.)$$

wenn (u_0, v_0) die berührende Gerade ist. Derselbe rückt unendlich fern, wenn

$$2av_0 = 3u_0^2,$$

was zu der Gleichung führt $4au_0^3 = 9u_0^4$, oder, da $u_0 = 0$ als zu dem Inflexionspuncte führend [§. 90, Gl. (8.)] auszuschliessen ist,

$$u_0 = \frac{4a}{9}.$$

Durch die Gegenwart des Inflexionspunctes fällt der Divisor u^3 heraus; also erniedrigt sich die Zahl der unendlich fernen Puncte, die Ordnung der Curve, um drei Einheiten. Dies gilt nach Plücker's Formeln allgemein.

Wenn wir (10.) mit (11.) combiniren, so erhalten wir das Eliminationsresultat:

$$u_0^3 - 6u_0^2 u + 9u_0 u^2 - 4av^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \qquad (12.)$$

Also wenn die Gerade (u, v) gegeben ist, so hat dieselbe mit der Curve drei Schnittpuncte. Denn aus (12.) folgen drei Werthe für u_0, welche die Tangenten in den Puncten liefern, in denen die Gerade (u, v) die Curve schneidet. Diese Tangenten haben die Coordinaten

$$u_0 = u_0, \quad v_0 = \frac{3u_0^2 u - u_0^3}{2av}.$$

Daher lautet die Gleichung eines der Schnittpuncte der Geraden (u_1, v_1) mit der Curve:

$$\frac{u - u_1}{v - v_1} = \frac{2av_1(u_1 - u_0)}{2av_1^2 - 3u_0^2 u_1 + u_0^3}, \quad . \quad . \quad . \qquad (13.)$$

wenn u_0 eine der drei Wurzeln der Gleichung ist:

$$u_0^3 - 6u_0^2 u_1 + 9u_0 u_1^2 - 4av_1^2 = 0.$$

Wird u_1, v_1 selbst zur Tangente, so enthält diese Gleichung die doppelte Wurzel $u_0 = u_1$ und $u_0 = 4u_1$.

Für die erstere wird (13.) zur Gleichung des Berührungspunctes, für $u_0 = 4u_1$ aber wird

$$3u_1^2 u + av_1 v - 4u_1^3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14.)$$

Dies ist die Gleichung des dritten Punctes, in welchem die Tangente (u_1, v_1) die Curve schneidet. Der Abstand s dieses Punctes vom Berührungspuncte ergiebt sich nach leichten Rechnungen:

$$s = 9\,\frac{\sqrt{a u_1 e^2 - u_1^2 (\sqrt{a} - \sqrt{u_1})^2}}{2a + 3\sqrt{a u_1} - 9 u_1}. \quad . \quad . \quad . \quad (15.)$$

Für $u_1 = 0$ wird $s = 0$; die drei Puncte fallen zusammen. Für $u_1 = \frac{4}{9}\,a$ wird $s = \infty$, da der Berührungspunct unendlich fern liegt. Die Asymptote, deren Coordinaten

$$u_1 = \frac{4}{9}\,a, \qquad v_1 = \frac{8}{27}\,a$$

sind, schneidet die Curve in dem Puncte:

$$2u + v = \frac{32}{27}\,a. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16.)$$

Die beiden andern Asymptoten fallen in die U-Axe zusammen.

Für $u_1 = a$ wird auch $v_1 = a$ oder $v_1 = -a$ und man erhält als Gleichung des Berührungspunctes

$$\pm\, 2v - 3u + a = 0,$$

als Gleichung des dritten Schnittpunctes

$$3u \pm v - 4a = 0.$$

Der Abstand s wird in beiden Fällen $s = \frac{9}{4}\,e$, wodurch e eingeführt ist.

Die geometrische Figur der Curve wird nun leicht zu übersehen sein. Ein Zweig der Curve berührt die U-Axe in deren unendlich fernem Puncte und entfernt sich allmälig weiter von derselben, während u und v positiv bleiben und $v > u$ ist. Für $v = u$ steigt die Curve senkrecht auf und entfernt sich ins Unendliche, die Asymptote $v = \frac{8}{27}\,a$, $u = \frac{4}{9}\,a$ berührend. Dann erscheint sie auf der entgegengesetzten Seite dieser Asymptote (nach der negativen Seite der Axen hin) im Unendlichen und entfernt sich allmälig von derselben, bis sie bei $v = 0$ gerade aufsteigt und alsdann von diesem ihrem Inflexionspuncte aus ihre concave Seite der V-Axe zukehrt und sich der U-Axe anschmiegt. Mithin erscheint der unendlich ferne Punct der U-Axe als Spitze der Curve.

Das Bogenelement der Curve hat, wenn man einführt

$$u = a\lambda^2,$$

den Werth:

$$ds = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{e^2 + a^2(1-\lambda)^2\lambda^4}}{\left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)^2} \cdot d\lambda. \quad . \quad . \quad . \quad (17.)$$

Für das Flächenelement finden wir, vom Puncte $v = 0$ ausgehend:

$$d\varphi = \frac{3}{4} e a \frac{\lambda^2}{\left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)^2} d\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18.)$$

und der Krümmungsradius R wird

$$R = \frac{3}{8} \frac{\{e^2 + a^2\lambda^4(1-\lambda)^2\}^{\frac{3}{2}}}{ae\left(1 - \frac{3}{2}\lambda\right)^3 \lambda}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19.)$$

Setzt man $u = a\lambda^2$, $v = a\lambda^3$, so sieht man, dass die Curve vom Geschlechte Null ist. Sie hat eine Spitze und eine Inflexion, ist von der dritten Classe und von der dritten Ordnung.

Um die Brennpuncte der Curve zu finden, setzen wir

$$u - v = ei,$$

also

$$a\lambda^2 - a\lambda^3 = ei. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20.)$$

Hieraus folgen drei Werthe für λ, die wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnen wollen. Für den andern Kreispunct im Unendlichen haben wir die Gleichung

$$a\lambda^2 - a\lambda^3 = -ei,$$

woraus wieder drei λ hervorgehen, die wir mit $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ bezeichnen wollen. Dieselben sind den entsprechenden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ conjugirt. Hat man nun ferner

$$u_\alpha = a\lambda_\alpha^2, \quad u_\alpha' = a\lambda_\alpha'^2; \quad v_\alpha = a\lambda_\alpha^3, \quad v_\alpha' = a\lambda_\alpha'^3$$

$$(\alpha = 1, 2, 3),$$

so ist die Gleichung jedes Brennpunctes

$$\frac{u - u_\alpha}{v - v_\alpha} = \frac{u_\alpha - u_\alpha'}{v_\alpha - v_\alpha'},$$

oder

$$\frac{u - a\lambda_\alpha^2}{v - a\lambda_\alpha^3} = \frac{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\alpha'^2}{\lambda_\alpha^3 - \lambda_\alpha'^3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21.)$$

93. Wenn eine Gerade sich so bewegt, dass die endliche zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels liegende Strecke derselben eine constante Grösse hat, welche Curve wird dann von ihr umhüllt?

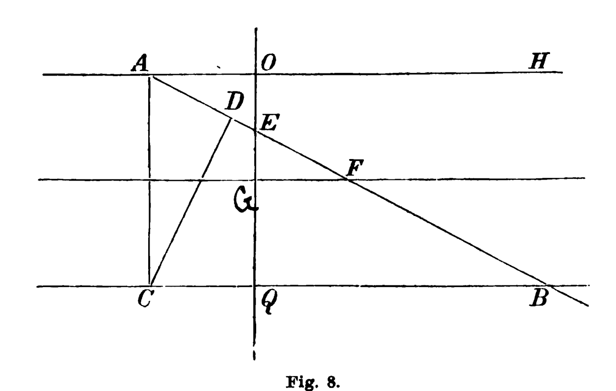


Fig. 8.

Sei OQ das Mittellot, OH die Axe der u, QB die Axe der v, $CD \perp AB$, G Mittelpunct von OQ,

$$EF = OG = GQ = \frac{e}{2}.$$

Ferner setzen wir

$$QB = v, \quad OA = -u = u'.$$

Dann ist

$$CD \,.\, AB = AC \,.\, CB.$$

Weil aber $EGF \sim ADC$, so ist

$$EF : FG = AC : CD = AB : CB.$$

Daher, wenn man einsetzt:

$$\frac{e}{2} : \frac{v - u'}{2} = \sqrt{e^2 + (v + u')^2} : (v + u'),$$

indem man beachtet, dass F die Mitte von AB ist. Daher die Gleichung der Curve:

$$e^2(v - u)^2 = (v + u)^2 \, (e^2 + (v - u)^2),$$

oder:

$$4e^2uv + (v^2 - u^2)^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22.)$$

Die drei ersten Ableitungen sind:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 4e^2vw^2 - 4u(v^2 - u^2),$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 4e^2uw^2 + 4v(v^2 - u^2),$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = 8e^2uvw.$$

Demnach die Gleichung des Berührungspunctes an der Tangente (u_0, v_0)

$$u(e^2v_0 - u_0(v_0^2 - u_0^2)) + v(e^2u_0 + v_0(v_0^2 - u_0^2)) + 2e^2v_0u_0 = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23.)$$

Man kann u und v auch wieder als Functionen eines Parameters ausdrücken; als solchen wählen wir den geometrisch als wichtig hervorstechenden Winkel, den die Tangente mit den Axen bildet. Nennen wir ihn φ, so wird

$$v - u = \frac{e}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad v + u = e \, . \cos\varphi.$$

Hieraus folgt:

$$v = e\frac{\cos\varphi\,(1 + \sin\varphi)}{2\sin\varphi}, \quad u = -e\frac{\cos\varphi\,(1 - \sin\varphi)}{2\sin\varphi}.$$

Ersetzt man noch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ durch die Functionen von λ,

$$\sin\varphi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

so erhält man v und u als rationale Functionen eines Parameters. Die Curve hat also, wie die analytische Geometrie lehrt, die höchste Anzahl Doppeltangenten.

Eine derselben ist $u = 0$, $v = 0$, da die ersten Ableitungen verschwinden.

Setzen wir, um die Curve im Unendlichen zu untersuchen,

$$u - v = \alpha,$$

so folgt die Gleichung

$$u^2 - \alpha u + \frac{\alpha^4}{4(e^2 + \alpha^2)} = 0. \quad . \; . \; . \; . \quad (24.)$$

Dieselbe zeigt, dass von jedem Puncte der unendlich fernen Geraden nur zwei statt vier Tangenten an die Curve gelegt werden können. Folglich muss die unendlich ferne Gerade Doppeltangente sein.

Um ihre Berührungspuncte zu finden, setzen wir

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{a}{t} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \\ v &= \frac{a}{t} + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (25.)$$

Die Entwicklung führt zur Coefficientenbestimmung und zwar erhält man

$$(a_0 - b_0)^2 + e^2 = 0.$$

Setzt man in die Gleichung (23.) die Entwicklungen (25.) ein, so erhält man

$$u - v = \pm ei,$$

also die unendlich fernen Kreispuncte als Berührungspuncte der unendlich fernen Doppeltangente.

Die dritte Doppeltangente ist die Mittellinie, bei der man also

$$u = \frac{a}{t} + a_0 + \cdots, \quad v = -\frac{a}{t} + b_0 + \cdots$$

statuiren muss. Man findet als Berührungspuncte:

$$u + v = \pm e.$$

Dies ist auch geometrisch evident.

Die sechs Berührungspuncte der drei Doppeltangenten sind zugleich sechs Spitzen der Curve. Für die vier Puncte $u = 0$, $v = 0$, $u + v = \pm e$ ist dies sofort durch die Anschauung klar. Man weist es aber auch analytisch für diese und besonders die beiden übrigen nach, indem man die Reihenentwicklung verfolgt.

Da bei der uns beschäftigenden Curve sich diese Verhältnisse besonders lehrreich gestalten, mögen dieselben einer etwas ausführlicheren Darlegung würdig erscheinen.

Da die Spitzen keine Singularität der Curven n^{ter} Classe sind, so haben wir für die Tangenten u, v in ihrer Nachbarschaft die gewöhnliche Entwicklung:

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots, \\ v &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots, \end{aligned}$$

oder, wenn es sich um Coordinaten mit unendlich grossen Zahlwerthen handelt,

$$u = \frac{a}{t} + a_0 + a_1 t + \cdots$$
$$v = \frac{b}{t} + b_0 + b_1 t + \cdots.$$

Betrachten wir nun die Gleichung des Punctes

$$L \equiv Au + Bv + C = 0,$$

so ist, wenn dieselbe für $t = 0$ einfach befriedigt wird, L ein Punct einer Tangente. Wenn sie aber auch für die folgenden Coordinaten erfüllt ist, so ist der Punct der Berührungspunct der Tangente, und wenn sie für noch ein folgendes Werthepaar erfüllt ist, so laufen drei consecutive Tangenten durch den Punct, er ist Spitze. Analytisch drückt sich dies aus

$$Au + Bv + C = 0,$$
$$A\frac{du}{dt} + B\frac{dv}{dt} = 0,$$
$$A\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{d^2v}{dt^2} = 0.$$

Wenn wir aber unsere Reihenentwicklung zu Grunde legen, so kommen wir zu den drei Forderungen:

$$Aa_0 + Bb_0 + C = 0,$$
$$Aa_1 + Bb_1 \quad = 0,$$
$$Aa_2 + Bb_2 \quad = 0.$$

Oder für unendlich grosse Zahlwerthe der (u, v):

$$Aa + Bb \quad = 0,$$
$$Aa_0 + Bb_0 + C = 0,$$
$$Aa_1 + Bb_1 \quad = 0.$$

Daher erhalten wir als Charakteristik der Spitze:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0, \\ \text{oder} \\ a\, b_1 - b\, a_1 = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26.)$$

Für unsere Curve nun haben wir, wenn wir setzen

$$u = -t^2 v,$$
$$v = \frac{2et}{1-t^4}, \quad u = -\frac{2et^3}{1-t^4}. \quad \ldots\ldots \quad (27.)$$

Daher in der Nähe des Punctes $v = 0$,

$$v = \quad 2e(t + t^5 + \cdots),$$
$$u = -2e(t^3 + t^7 + \cdots).$$

Da $a_2 = b_2 = 0$, so ist die Bedingung (26.) erfüllt.

In der Nähe des Punctes $u + v = e$ haben wir $t = 1 + z$,

$$v = \frac{e}{2}\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \cdots\right),$$
$$u = \frac{e}{2}\left(+\frac{1}{z} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}z + \cdots\right).$$

Endlich für den Punct $v - u = ei$,

$$v = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}z + \cdots\right),$$
$$u = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{3}{2}i - \frac{1}{2}z + \cdots\right).$$

Die Methode der Reihenentwicklung ist die einzige, welche bei der Untersuchung einer Curve in der Nähe eines gewissen Punctes völlige Sicherheit gewährt.

Für den Krümmungsradius erhält man den rationalen Ausdruck

$$R = -3et\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}. \quad \ldots\ldots \quad (28.)$$

Auch der Bogen wird durch ein rationales Integral gefunden.

94. Auf zwei concentrischen Kreisperipherien bewegen sich zwei Puncte mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Welche Curve wird von ihren Verbindungslinien umhüllt?

Sei in Fig. 9 $OA = u$, $QB = v$, $EC = r_1$, $ED = r_2$, $\angle OEC = \varphi_1$, $\angle OED = \varphi_2$. Ferner nehmen wir an

$$\varphi_1 = mt, \quad \varphi_2 = nt$$

und lassen t ursprüngliche Variable sein. Dann kann man die trigonometrische Tangente des Winkels ABQ verschiedentlich ausdrücken und gelangt zu den Gleichungen:

$$\frac{r_1(1-\cos\varphi_1)}{r_1\sin\varphi_1 - u} = \frac{r_1 - r_2\cos\varphi_2}{r_2\sin\varphi_2 - u},$$
$$\frac{r_1(1+\cos\varphi_1)}{v - r_1\sin\varphi_1} = \frac{r_1 + r_2\cos\varphi_2}{v - r_2\sin\varphi_2}.$$

Hieraus folgt alsbald:

$$\left.\begin{aligned} u &= r_1 \frac{r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2 - r_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2}, \\ v &= r_1 \frac{-r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2 - r_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2)}{r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2}. \end{aligned}\right\} \quad (29.)$$

Hieraus folgt, weil $e = 2r_1$,

$$\frac{u - v}{2r_1} = \frac{u - v}{e} = \frac{r_1 \sin \varphi_1 - r_2 \sin \varphi_2}{r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2}. \quad . \quad . \quad (30.)$$

Wenn man quadrirt und 1 addirt, folgt weiter:

$$\frac{(u - v)^2 + e^2}{e^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}{(r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2)^2}. \quad . \quad (31.)$$

Die Gleichungen (30.) und 31.) konnte man auch direct geometrisch leicht ableiten.

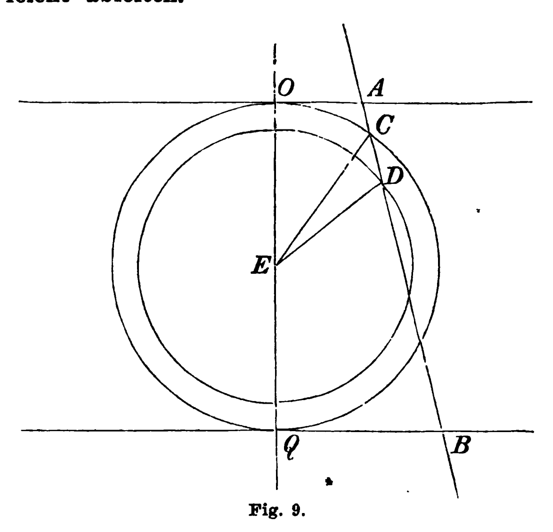


Fig. 9.

Die letzte zeigt mit grosser Deutlichkeit, dass für die Brennpuncte der Curve einfache Beziehungen erwartet werden dürfen. Nennen wir die Coordinaten der Tangente, welche von einem Brennpuncte aus an die Curve geht, u_0, v_0, die zugehörigen Werthe der φ α_1 und α_2, den Werth von t, t_0, so ist:

$$\cos (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

Daraus kann man ableiten:

$$\sin (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}\, i.$$

Dann folgt

$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{r_2}{r_1} = \lambda, \quad . \quad (32.)$$

oder, $m > n$,

$$\cos(m - n) t_0 + i \sin(m - n) t_0 = \lambda,$$

folglich

$$\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1 = \lambda^{\frac{m}{m-n}} . \beta^m,$$

$$\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2 = \lambda^{\frac{n}{m-n}} . \beta^n,$$

wo β eine $(m - n)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit bedeutet.

Nun liefert Gl. (30.)

$$\frac{u_0 - v_0}{2r_1} = \frac{\sin \alpha_1 - (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)) \sin \alpha_2}{\cos \alpha_1 - (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)) \cos \alpha_2}.$$

Ersetzt man α_1 durch $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2$, so folgt, wie zu erwarten,

$$u_0 - v_0 = 2r_1 i.$$

Andrerseits hat man allgemein:

$$\frac{u + v}{2r_1} = - \frac{r_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{r_1 \cos \varphi_1 - r_2 \cos \varphi_2}. \quad . \quad . \quad . \quad (33.)$$

Daher

$$\frac{u_0 + v_0}{2r_2} = - \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))}$$

$$= \frac{- \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{- \sin \alpha_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - i \cos \alpha_2 . \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{1}{i(\cos \alpha_2 - i \sin \alpha_2)}$$

$$= - i . (\cos \alpha_2 + i . \sin \alpha_2).$$

Also:

$$\frac{u_0 + v_0}{2r_2} = - i . \lambda^{\frac{n}{m-n}} . \beta^n.$$

Für die Coordinaten der conjugirten Tangente wird

$$\frac{u_0' - v_0'}{2r_1} = - i, \quad \frac{u_0' + v_0'}{2r_2} = i \lambda^{\frac{n}{m-n}} . \beta^{-n}.$$

Beachtet man nun, dass

$$\beta^n + \beta^{-n} = 2 \cos \frac{2\pi n}{m - n} p, \quad \beta^n - \beta^{-n} = 2i \sin \frac{2\pi n}{m - n} p,$$

wo p eine ganze Zahl, so findet man die Brennpuncte durch die Gleichungen:

$$u+v+(u-v)\,.\,\lambda^{\overline{m-n}}\,.\cos\frac{2\pi np}{m-n}=2r_1\,.\,\lambda^{\overline{m-n}}\,.\sin\frac{2\pi np}{m-n}, \quad . \quad (34.)$$

$$(p=0,1,\ldots,m-n-1).$$

Für den Abstand von dem Puncte $u+v=0$ findet man

$$s=r_1\,.\,\lambda^{\frac{m}{m-n}}.$$

Von der Mittellinie dagegen hat jeder Brennpunct den Abstand

$$r_1\,.\,\lambda^{\frac{m}{m-n}}\,.\,\sin\frac{2\pi np}{m-n}.$$

Demnach liegen die Brennpuncte sämmtlich auf einem um den Mittelpunct der concentrischen Kreise mit dem Radius $r_1\,.\,\lambda^{\frac{m}{m-n}}$ beschriebenen. Sie bilden die Ecken eines regelmässigen Polygons. Man kann die rechte Seite von (31.) auch dadurch verschwinden lassen, dass man für t einen Werth mit unendlich grossem imaginären Theil nimmt. Dann erhält man $u_0+v_0=0$ und es kommt der Mittelpunct $u+v=0$ der concentrischen Kreise als fernerer Brennpunct hinzu. Derselbe ist einziger Brennpunct, wenn $r_1=r_2=r$ Denn in diesem Falle ist:

$$\left.\begin{aligned}\frac{u-v}{2r}&=\frac{\sin\varphi_1-\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1-\cos\varphi_2},\\ \frac{u+v}{2r}&=-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos\varphi_1-\cos\varphi_2},\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ . \quad (35.)$$

mithin

$$\left.\begin{aligned}\frac{(u-v)^2+e^2}{e^2}&=\frac{1}{\sin^2\frac{m+n}{2}t},\\ \frac{u-v}{e}&=-\operatorname{cotg}\frac{m+n}{2}t,\\ \frac{u+v}{e}&=\frac{\cos\frac{m-n}{2}t}{\sin\frac{m+n}{2}t}.\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ .\ .\ . \quad (36.)$$

Nimmt man $n=1$, $m=2$, so erhält man die Kardioide mit der Gleichung:

$$(2v+u)\,e^2=u\,(u+3v)^2. \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (37.)$$

Geht man zu den Exponentialfunctionen über, so kann man sogar direct die Gleichung der allgemeinen Curve aufstellen. Wir begnügen uns, das Resultat anzugeben.

Wenn zwei Puncte die Peripherie eines Kreises mit gleichförmigen Geschwindigkeiten durchlaufen, die sich verhalten wie $m:n$, so umhüllen ihre Verbindungslinien die Curve mit der Gleichung:

$$(u + v + i\sqrt{e^2 - 4uv})^{m+n}$$
$$= [(u - v)^2 + e^2]^n (ei - u + v)^{m-n}. \quad . \quad . \quad . \quad (38.)$$
$$m > n.$$

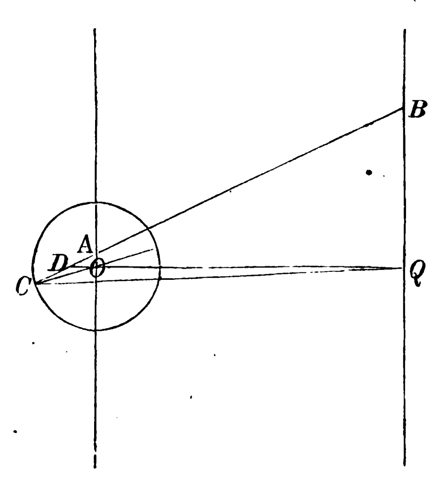


Fig. 10.

Aufgabe. Man finde die Brennlinie (Katakaustika) des Punctes Q in Bezug auf den Kreis um O.

OQ nehmen wir als Mittellot unserer Axen. Der Strahl BAC macht mit dem Radius (Einfallslot) OC denselben Winkel, wie der vom Puncte Q kommende Lichtstrahl QC. Verlängern wir OQ bis zum Schnittpuncte D mit der Geraden AB, so wollen wir zunächst die Gleichung des Punctes D ermitteln, durch den unser Strahl AB, der ja Tangente der Brennlinie ist, hindurchgeht.

Wir führen jetzt folgende Bezeichnungen ein:

$$OA = u,\ QB = v,\ OQ = e,\ OC = r,\ \sphericalangle DCO = QCO = \beta,$$
$$\sphericalangle DOC = \alpha.$$

Dann ist

$$DO \,.\, \sin(\alpha + \beta) = r \,.\, \sin\beta = e \,.\, \sin(\alpha - \beta).$$

Denn man erkennt leicht, dass

$$\sphericalangle ADO = \alpha + \beta,\ OQC = \alpha - \beta$$

ist. Folglich

$$DO : e = \sin(\alpha - \beta) : \sin(\alpha + \beta).$$

Also auch

$$DO : DO + e = \sin(\alpha - \beta) : 2\sin\alpha \,.\, \cos\beta = u : v.$$

Durch Projection von OQ auf die Richtung CO leitet man auch ab:

$$\cot\beta = \frac{r + e \,.\, \cos\alpha}{e \,.\, \sin\alpha}.$$

Hieraus folgt sofort

$$2 \cdot \frac{u}{v} = \frac{r}{r + e \,.\, \cos\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (38.)$$

Dies ist die Gleichung des Punctes D. Nimmt man $\alpha = 0$, so folgt

$$2\,\frac{u}{v} = \frac{r}{r + e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39.)$$

Dies ist die Gleichung des sogenannten Bildpunctes von Q. Der Name rührt daher, dass bei einem Hohlspiegel von geringer Öffnung die von dem leuchtenden Puncte Q ausgehenden Strahlen sich in diesem Puncte sammeln. Er zeigt daher eine auffallende Helligkeit vor den andern Puncten der Axe.

Ferner suchen wir die Gleichung des Punctes C zu erhalten. Dieselbe ergiebt sich unmittelbar aus der Bemerkung, dass man seine Abstände von den Axen und dem Mittellote kennt, und es wird:

$$\frac{r \,.\, \cos\alpha}{e + r \,.\, \cos\alpha} = \frac{u + r \,.\, \sin\alpha}{v + r \,.\, \sin\alpha}.$$

Hieraus folgt:

$$(u - v)\cos\alpha + e\sin\alpha + u\,\frac{e}{r} = 0. \quad \ldots \quad (40.)$$

Wir haben also jetzt zwei Puncte der Tangente und finden daher

durch Auflösung der Gleichungen (38.) und (40.) nach u und v diese Coordinaten als Functionen des Parameters α ausgedrückt.

Die Ausrechnung ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{-re\sin\alpha}{e - r\cos\alpha - 2e\,.\cos^2\alpha}, \\ v &= \frac{-2e(r + e\cos\alpha)\sin\alpha}{e - r\cos\alpha - 2e\,.\cos^2\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41.)$$

Der Curvengleichung, welche man durch Elimination des Parameters erhält, kann man die Form geben:

$$\{2(e^2 - r^2)u^2 + 3r^2uv - r^2v^2\}^2$$
$$= e^2r^2(rv + 2(e - r)u)\,(-rv + 2(e + r)u). \quad . \quad (42.)$$

Die Tangente $u = 0$, $v = 0$ ist Doppeltangente der Curve mit den beiden Berührungspuncten

$$rv + 2(e - r)u = 0; \qquad -rv + 2(e + r)u = 0.$$

Die physikalische Bedeutung des letzteren haben wir bei (39.) erkannt; der erstere rührt ebenso von der Reflexion an der dem Puncte Q zugekehrten Seite des Kreises her.

Um die Curve in einem Berührungspuncte der Doppeltangente näher zu untersuchen, entwickeln wir (41.) nach Potenzen von α und finden:

$$u = \frac{re}{r + e}\alpha + \frac{re^2}{(r + e)^2}\alpha^3 + \cdots,$$
$$v = 2e\alpha + \frac{e^2}{r + e}\alpha^3 + \cdots.$$

Mithin führt die Annahme $\frac{2u}{v} = \frac{r}{r + e}$ zu einer Gleichung in α, aus der α^3 sich als Factor abscheidet. Mithin fallen in diesem Puncte drei Tangenten zusammen, wir haben eine Spitze der Curve erhalten. Die Brennlinie eines Kreises hat daher die Eigenschaft, dass auf dieser Doppeltangente in den Berührungspuncten je eine Spitze vorhanden ist.

Die beiden andern Doppeltangenten unserer Curve sprechen sich ebenfalls in der Curvengleichung deutlich aus. Man erhält dieselben aus dem quadrirten Klammerausdruck, indem man für $u = \infty$ alle übrigen Glieder verschwinden lassen darf. Die Coordinaten der beiden andern Doppeltangenten sind also unendlich gross und ihr Verhältniss folgt aus der Gleichung:

$$2v = 3u \pm u\sqrt{r^2 + 8e^2}.$$

Die beiden Doppeltangenten sind also den Axen parallel, was sich auch geometrisch leicht nachweisen lässt. Die Tangente unserer Curve hat nämlich in der Lage, wo sie aus dem dem Puncte Q nächstliegenden Kreispuncte entspringt, eine zu den Axen senkrechte Richtung. Legt man von Q an den Kreis eine Tangente, so wird diese zugleich Curventangente. Zwischen beiden Lagen muss es also einmal auf jeder Kreishälfte vorkommen, dass die Curventangente den Axen parallel wird und diese beiden symmetrischen Curventangenten verschmelzen zur Doppeltangente. Die andere entsteht ebenso auf dem von Q abgekehrten Theile des Kreises.

In Punctcoordinaten kann man der Lemniscatengleichung die Form geben:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43.)$$

Man sieht, dass dieselbe mit der Gleichung unserer Curve in Liniencoordinaten eine nicht geringe Analogie zeigt.

Die Gleichung unserer Curve in Punctcoordinaten (vergl. Salmon-Fiedler, Höhere Curven Art. 115) steigt auf den sechsten Grad und lautet:

$$\{4(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - r^2[(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2]\}^3$$
$$= 27(bx - ay)^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2.$$

Dass es in diesem Falle vorzuziehen ist, die Curve nach der Methode der Liniencoordinaten zu untersuchen, kann wohl nicht für zweifelhaft gelten.

Aufgabe. Man bestimme die Gleichung der Lemniscate in unseren Liniencoordinaten.

Diese Curve hat, wie wir als bekannt voraussetzen wollen in Cartesischen Coordinaten die oben (43.) angegebene Gleichung. Setzen wir

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{2},$$

so erhält man für x eine Gleichung mit zwei paarweise zusammenfallenden Wurzeln $x = \pm \frac{1}{4}\sqrt{6}$. Daher ist die Gerade $y = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ Doppeltangente der Lemniscate. Derselben ist $y = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$ parallel und ebenfalls Doppeltangente. Diese

beiden Doppeltangenten nehmen wir zur V- und U-Axe unseres Liniencoordinatensystems.

Die Gleichung der Tangente (in Punctcoordinaten) lautet:

$$(\xi - x)(2x^3 + 2xy^2 - x) + (y - \eta)(2x^2y + 2y^3 + y) = 0,$$

oder mit Hülfe der Curvengleichung:

$$\xi(2x^3 + 2xy^2 - x) + \eta(2x^2y + 2y^3 + y) = x^2 - y^2.$$

Setzen wir in diese Gleichung für η den Werth $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, so liefert ξ den Werth der u-Coordinate, während $\eta = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$ in derselben Weise die v-Coordinate liefert. Es braucht wohl kaum daran erinnert zu werden, dass dieses Verfahren zugleich die Methode ergiebt, welche man einzuschlagen hat, um für eine in Punctcoordinaten gegebene Curve die Gleichung in Liniencoordinaten zu ermitteln. Die Wahl der Axen ist natürlich hier ein specieller, nicht zu verallgemeinernder Gedanke. Setzt man nun

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi, \quad \text{also } r^2 = \cos 2\varphi,$$

so wird

$$v + u = \frac{2r^3}{\cos 3\varphi}, \quad \frac{v+u}{v-u} = \frac{2r^3}{\sin 3\varphi} \cdot \sqrt{2},$$

demnach

$$4r^6 = \frac{(v+u)^2}{1 + 2(v-u)^2}.$$

Da man nun hat

$$\cos\varphi = \frac{2r^3}{(2r^2 - 1)^2 (v + u)},$$

so kann man eine Gleichung bilden, die aus

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$$

herstammt und für r^2 einen Werth liefert. Alsdann braucht man nur in den Cubus zu erheben. Man findet:

$$4(3v^2 + 3u^2 - 2uv - 1)^3 = 27(v+u)^2(1+2(v-u)^2)^2. \quad (44.)$$

Dies ist die Gleichung der Lemniscate in unsern Liniencoordinaten. Die Curve ist sechster Classe. Ordnet man nach fallenden Potenzen von u und v, so werden die Glieder sechster Ordnung — nur gerade Ordnungen kommen vor —

$$64(18v^2 + 18u^2 - 13uv)u^2v^2.$$

Dieser Umstand beweist, dass beide Axen Doppeltangenten sind.

Denn nehme man den unendlich fernen Punct der v-Axe mit der Gleichung $v = \infty$, so bleibt nach Division mit v^4 nur eine Gleichung vierten Grades übrig, welche die vier Tangenten liefert, die von diesem Puncte aus sich an die Curve ziehen lassen. Allein jeder Punct $v = a$ der V-Axe hat dieselbe Eigenschaft, dass die Anzahl der von ihm an die Curve gehenden Tangenten um zwei Einheiten kleiner ist als die Classe der Curve. Sie ist also Doppeltangente. Hier mag daran erinnert werden, dass die Doppeltangente die reciproke Singularität des Doppelpunctes ist, wie die nachstehende Zusammenstellung beweist.

Doppelpunct.	Doppeltangente.
Jede durch den Doppelpunct laufende Gerade trifft die Curve in einer Anzahl von Puncten, welche um zwei Einheiten kleiner ist als die Ordnung der Curve.	Von jedem Puncte der Doppeltangente lässt sich eine Anzahl von Tangenten an die Curve ziehen, welche um zwei Einheiten kleiner ist als die Classe der Curve.

Die Doppelpuncte der Curve lassen sich im Allgemeinen leichter durch die Darstellung in Punctcoordinaten finden. Allein bei der Lemniscate liefert Gl. (44.) dieselben höchst einfach. Setzen wir $u + v = 0$, so folgt die Gleichung sechsten Grades

$$(8u^2 - 1)^3 = 0.$$

Die Wurzeln fallen also zu je drei zusammen. Hätten wir statt der vorstehenden Gleichung etwa die nachstehende

$$(8u^2 - 1)^2 (au^2 + bu + c) = 0,$$

so würde dies einen gewöhnlichen Doppelpunct, oder, wenn der hinzutretende Factor ein Quadrat wäre, einen dreifachen Punct anzeigen. Der hier auftretende Cubus*) zeigt an, dass die Tangenten im Doppelpunct drei gewöhnliche vertreten, also die beiden Tangenten desselben zugleich Inflexionstangenten sind. Ihre Coordinaten sind

$$u = -v = \pm \frac{1}{4} \sqrt{2}.$$

Die beiden übrigen Doppelpuncte der Lemniscate haben die analogen Eigenschaften und die Gleichungen:

*) Vergleiche Seite 68 und 70.

$$v - u = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} \, . \, i.$$

Weil $\frac{1}{2}\sqrt{2} = e$, so sind dies die imaginären Kreispuncte im Unendlichen. Die Brennpuncte unserer Curve haben die Gleichungen

$$u + v = \sqrt{2}\, .$$

Geometrisch sind dieselben dadurch ausgezeichnet, dass das Product aus den Brennstrahlen für jeden Curvenpunct constant ist. Diese Eigenschaft beweist man leichter mit Punctcoordinaten. Legt man vom Brennpuncte aus eine Tangente an die Curve, so werden die Coordinaten gefunden durch die Gleichung sechsten Grades:

$$(8v^2 - 8\sqrt{2}.v + 5)^2 (16 v^2 - 16 \sqrt{2}.v - 17) = 0.$$

Der quadratische Factor zeigt, dass jeder Werth von v, welcher ihn verschwinden macht, die Coordinate einer Tangente im Doppelpuncte ist. Nach der Definition des Brennpuncts und der oben bewiesenen Eigenschaft der imaginären Doppelpuncte der Lemniscate war dies zu erwarten. Übrigens geht von dem Brennpuncte auch ein reelles Tangentenpaar an die Lemniscate. Seine Coordinaten sind

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{2} \mp \frac{5}{4}, \quad u = \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{5}{4}.$$

Dieselben gehorchen auch der Gleichung $v - u = \mp \frac{5}{2}$; und da Gleiches für den andern Brennpunct gilt, so laufen je zwei der vier reellen Tangenten, welche von den beiden Brennpuncten aus an die Curve gehen, durch den unendlich fernen Punct $v - u = \mp \frac{5}{2}$. Die vier Tangenten bilden also ein Parallelogramm.

Der Kegelschnitt $3u^2 + 3v^2 - 2uv - 1 = 0$ ist eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpuncte $u + v = 0$ und der Scheiteltangente $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}$. Sie hat also die Punctcoordinatengleichung $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$. Man kann die Lemniscate aus ihr durch Inversion (Petersen, Methoden und Theorieen S. 34) entstehen lassen.

Die Coordinaten einer der zwei andern (imaginären) Doppeltangenten sind $u = v = \frac{1}{4} i \sqrt{2}$. Man findet sie am einfachsten durch Betrachtung der Tangenten, welche von dem Puncte $u = v$ an die Curve gehen.

Aufgabe. Um den Punct Q dreht sich ein Winkel $CQD = \gamma$ von unveränderlicher Grösse. Die Puncte C, D liegen auf einem Kreise mit dem Radius r. Welche Curve umhüllt die Gerade CD?

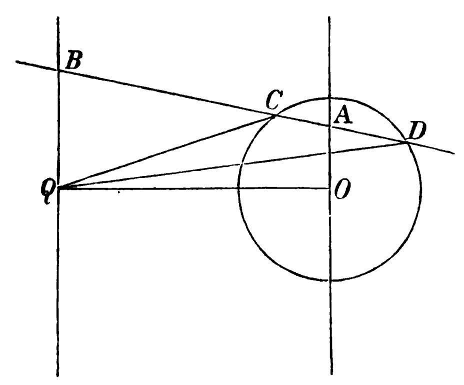


Fig. 11.

Wir verbinden den gegebenen Punct mit dem Mittelpuncte des Kreises O, errichten zu dieser Verbindungslinie die Senkrechten in Q und O und nehmen diese Geraden zu Axen unseres Systems. Schneidet also CD die Senkrechten in A und B, so ist

$$OA = u, \quad QB = v, \quad OQ = e.$$

Sei O der Anfangspunct eines rechtwinkligen Punctcoordinatensystems, OA die Y-, OQ die X-Axe. Dann ist die Gleichung der Geraden AB in diesem System

$$-(v-u)x + ey - eu = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45.)$$

denn für $x = 0$ hat man $y = u$ und für $x = e$, $y = v$.

Suchen wir die Schnittpuncte dieser Geraden mit dem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$, so wird

$$x^2 + \left(u + \frac{(v-u)x}{e}\right)^2 = r^2.$$

Nennen wir die Punctcoordinaten dieser Schnittpuncte x_1 und x_2, so haben wir:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2eu(v-u)}{e^2 + (v-u)^2}; \quad x_1 x_2 = \frac{e^2(u^2 - r^2)}{e^2 + (v-u)^2}.$$

Ferner

$$y_1 = u + \frac{v-u}{e} x_1, \quad y_2 = u + \frac{v-u}{e} x_2.$$

Beachten wir nun, dass

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{e(y_1 - y_2) + x_1 y_2 - y_1 x_2}{(e - x_1)(e - x_2) + y_1 y_2},$$

also

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v(x_1 - x_2)}{e^2 + u^2 + \frac{u(v-u) - e^2}{e}\left(x_1 + x_2\right) + \left(1 + \frac{(v-u)^2}{e^2}\right) x_1 x_2},$$

so wird nach leichter Rechnung:

$$\{e^4 + e^2(u^2 + v^2) - r^2(e^2 + (v-u)^2)\}^2 \operatorname{tg}^2 \gamma$$
$$= 4v^2e^2\{r^2(e^2 + (v-u)^2) - e^2u^2\}. \quad . \quad . \quad (46.)$$

Dies ist die Gleichung unserer Curve. Es mag bemerkt werden, dass die durchgeführten Entwicklungen zunächst mit Hülfe der Punctcoordinaten geschahen. Ein solches Verfahren hat selbstverständlich sachlich nichts Auffälliges. Man sieht aber, dass unser Liniencoordinatensystem sich leicht zu einem einfachen Punctcoordinatensysteme in Beziehung bringen lässt. Und eine solche Beziehung erspart oft schwierigere Entwicklungen.

Die Annahme $v = 0$ führt zu dem Werthe $u = ei$. Die Gerade $(ei, 0)$ ist aber ebenso wie $(-ei, 0)$ Doppeltangente der Curve. Denn diese Werthe machen $F(u, v)$ und die beiden Ableitungen nach u und v zu Null. Der Punct $v = 0$ ist der reelle Punct dieser durch einen unendlich fernen Kreispunct laufenden Geraden, also Brennpunct der Curve.

Lässt man den zweiten Factor der rechten Seite unserer Gleichung verschwinden, so folgt

$$v = ei \quad \text{und dazu} \quad u = 0 \quad \text{oder} \quad u = -\frac{2er^2}{e^2 - r^2} i.$$

Die vier hieraus resultirenden Tangenten sind wieder alle imaginär und der reelle Schnittpunct des einen Paares ist wieder ein Brennpunct. Es ist dies der Punct $u = 0$. Beide Grundpuncte O und Q sind also Brennpuncte unserer Curve.

Lässt man γ verschiedene Werthe annehmen, so resultirt ein Curvenbüschel. Alle diese Curven vierter Classe haben die bisher besprochenen zwei imaginären Doppeltangenten und die

vier weiteren Tangenten sowie die beiden Brennpuncte gemeinsam. Jeder Brennpunct ist zudem doppelt zu rechnen.

Wird $e = r$, so zerfällt die Curve in einen dem erzeugenden Kreise concentrischen Kreis und den Punct $v = 0$.

Ist $\alpha = 90^0$, so verwandelt sich die Curve in den doppelt zu rechnenden Kegelschnitt:

$$u^2 + v^2 + \frac{2r^2}{e^2 - r^2} uv + e^2 = 0.$$

Derselbe ist Ellipse, wenn $e < r$, Hyperbel, wenn $e > r$. Dabei muss aber $e^2 < 2r^2$ sein, wenn die Curve reell sein soll. Hiernach haben wir den wohlbekannten Satz: „Die Kreissehnen, welche an einem gegebenen Puncte einen rechten Winkel spannen, umhüllen einen Kegelschnitt, dessen Brennpuncte der Kreismittelpunct und der feste Drehpunct sind.“ Vergl. Salmon-Fiedler, Die Kegelschnitte, Seite 627.

Aus diesem Kegelschnitt kann man am bequemsten die geometrische Figur unserer Curve entnehmen. Liegt z. B. der Punct Q im Innern des um O beschriebenen Kreises, so besteht die Curve aus zwei ellipsenartigen Ringen, welche einander umschliessen.

Nennt man die Abstände der beiden Brennpuncte von einer Curventangente (u, v) etwa p_1, p_2, so hat man:

$$(e^2 + 2p_1p_2)^2 \operatorname{tg}^2 \gamma = 4p_2^2(r^2 - p_1^2).$$

Auch kann man für diese Grössen die Ausdrücke erhalten:

$$p_1 = r \cdot \cos\psi, \quad p_2 = \frac{e^2 \sin\gamma}{2r \cdot \sin(\psi - \gamma)},$$

wo ψ einen willkürlichen Winkel bezeichnet.

95. Die Cykloide.

In nebenstehender Figur sei $OA = QB = v$, $OD = -u$, $AB = e = 2r$.

Wenn der Kreis auf der U-Axe rollt, so beschreibt der Punct C des rollenden Kreises die Cykloide, deren tiefster Punct in O liegen möge. Nennen wir den Punct, in welchem die Verbindungslinie des augenblicklich höchsten Punctes des Kreises mit C die U-Axe schneidet, D, so ist BD Tangente der Cykloide, weil BCA ein rechter Winkel und CA normal zur Cykloide ist, da in diesem Augenblicke der Punkt A als ruhend

gedacht werden kann. Nennen wir den Winkel CBA, α, so ist $v = 2r\alpha = e\alpha$; ferner aus Dreieck DBA

$$\frac{v-u}{e} = \operatorname{tg}\frac{v}{e} \quad \text{. . . . . . . (47.)}$$

Dies ist die Gleichung der Cykloide.

Man bildet nun die folgenden Gleichungen:

$$(v-u)^2 + e^2 = \frac{e^2}{\cos^2\frac{v}{e}},$$

$$\frac{du}{dv} - 1 = -\frac{1}{\cos^2\frac{v}{e}},$$

$$\frac{d^2u}{dv^2} = -\frac{2}{e}\cdot\frac{1}{\cos^3\frac{v}{e}}\cdot\sin\frac{v}{e},$$

indem v als unabhängige Variable genommen wird.

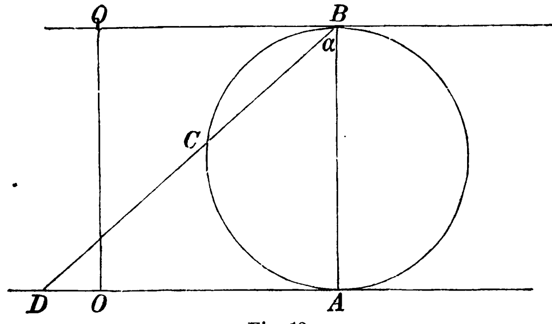


Fig. 12.

Hieraus folgt für den Krümmungsradius R

$$R = -2e \,.\, \sin\frac{v}{e} \quad \text{. . . . . (48.)}$$

Demnach ist der Krümmungsradius gleich dem doppelten CA.

Für alle $v = 2e\pi p$, wenn p ganzzahlig, erhalten wir $R = 0$, also Spitzen.

Für das Bogenelement wird $ds = 2\sin\frac{v}{e}\cdot dv$,

$$s = 2e\left(1 - \cos\frac{v}{e}\right) \quad \text{. . . . . (49.)}$$

Für das Flächenelement:

$$d\varphi = -v \,.\, \sin\frac{v}{e}\cdot\cos\frac{v}{e}\cdot dv + e \,.\, \sin^2\frac{v}{e}\cdot dv,$$

und daher das Curvensegment begrenzt von der Sehne, welche den tiefsten Punct $u = 0$ mit dem Berührungspuncte der Tangente (v, u) verbindet, (also in unserer Figur die Gerade OC)

$$\varphi = \frac{3}{4} ev - \frac{e}{2} v \sin^2 \frac{v}{e} - \frac{3}{8} e^2 \sin \frac{2v}{e} \cdot \quad \ldots \quad (50.)$$

Nimmt man $v = e\pi$, also das Curvenstück, welches durch eine ganze Abrollung beschrieben wird, so ist die von der U-Axe und diesem ganzen Curvenzweig begrenzte Fläche $\varphi = \frac{3}{4} e^2 \pi$, also dreimal so gross als der Inhalt des rollenden Kreises.

Das Segment vom tiefsten zum höchsten Punct hat den Inhalt $\frac{1}{2} r^2 \pi$. Die beiden so entstehenden Segmente lassen also ein Dreieck mit dem Inhalte $2r^2\pi$ von der ganzen Fläche übrig, wie ja auch geometrisch evident ist, da seine Höhe $2r$ und seine Grundlinie $2r\pi$ ist.

96. Ist im Allgemeinen eine Curve in Punctcoordinaten durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ definirt, so wähle man irgend ein passendes System unserer Liniencoordinaten, was durch zweckmässige Wahl der Grundpuncte O, Q geschieht. Alsdann bestimme man die Schnittpuncte A, B der Axen U, V mit einer Tangente der Curve, woraus man die Werthe $OA = u$ und $QB = v$ erhält. Aus diesen Gleichungen eliminirt man mit Hülfe der Curvengleichung $F(x, y) = 0$ die Coordinaten x, y, und die resultirende Gleichung in u, v ist die gesuchte Gleichung der Curve in Liniencoordinaten. Dieselbe ist im Allgemeinen vom Grade $n(n-1)$ und dieser erniedrigt sich nur, wenn die Curve Doppelpuncte oder Spitzen enthält.

Soll umgekehrt die Gleichung n^{ten} Grades $F(u, v) = 0$ der Curve, welche in Liniencoordinaten gegeben ist, in eine solche in Punctcoordinaten verwandelt werden, so greife man den Berührungspunct der Tangente (u, v) heraus und bestimme seine Abstände x, y von zwei willkürlichen zu einander senkrechten Linien. So erhält man ebenfalls drei Gleichungen, aus denen man u, v eliminirt, um ein Resultat, welches im Allgemeinen $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in x, y ist, zu erhalten. Dieser Grad erniedrigt sich, wenn die Curve Doppeltangenten oder Inflexionen enthält.

97. Wie für die Punctcoordinaten, so lassen sich auch für die Liniencoordinaten Transformationsformeln angeben.

Wählt man die willkürlichen Puncte

$$\left.\begin{array}{l} O' \equiv Au + Bv + C = 0, \\ Q' \equiv Du + Ev + F = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (51.)$$

zu Grundpuncten des neuen Systems, so ist der Axenabstand

$$e' = \sqrt{(C-F)^2 + e^2(A-D)^2},$$

wenn die obigen Gleichungen die Normalform haben, was wir voraussetzen dürfen. Lösen wir die Gleichungen (51.) nach u und v auf, so erhalten wir die Coordinaten des neuen Mittellotes. Nennen wir dieselben u_0, v_0, so ist

$$(A-D)(u_0 - v_0) + C - F = 0.$$

Daher findet man den Winkel α, den das neue Mittellot mit einer willkürlichen Geraden (u, v) bildet, aus der Gleichung: (§. 20)

$$\operatorname{tg} \alpha = e \frac{(A-D)(u-v) + C - F}{(C-F)(u-v) - e^2(A-D)}.$$

Fällen wir nun die Senkrechten von O' und Q' auf die Gerade (u, v), so werden die Längen derselben bezüglich:

$$\frac{Au + Bv + C}{\sqrt{e^2 + (u-v)^2}}\, e, \quad \frac{Du + Ev + F}{\sqrt{e^2 + (u-v)^2}}\, e.$$

Und hieraus gehen die Werthe der neuen Coordinaten u', v' hervor, wenn wir durch $\cos \alpha$ dividiren. So ergiebt sich dann

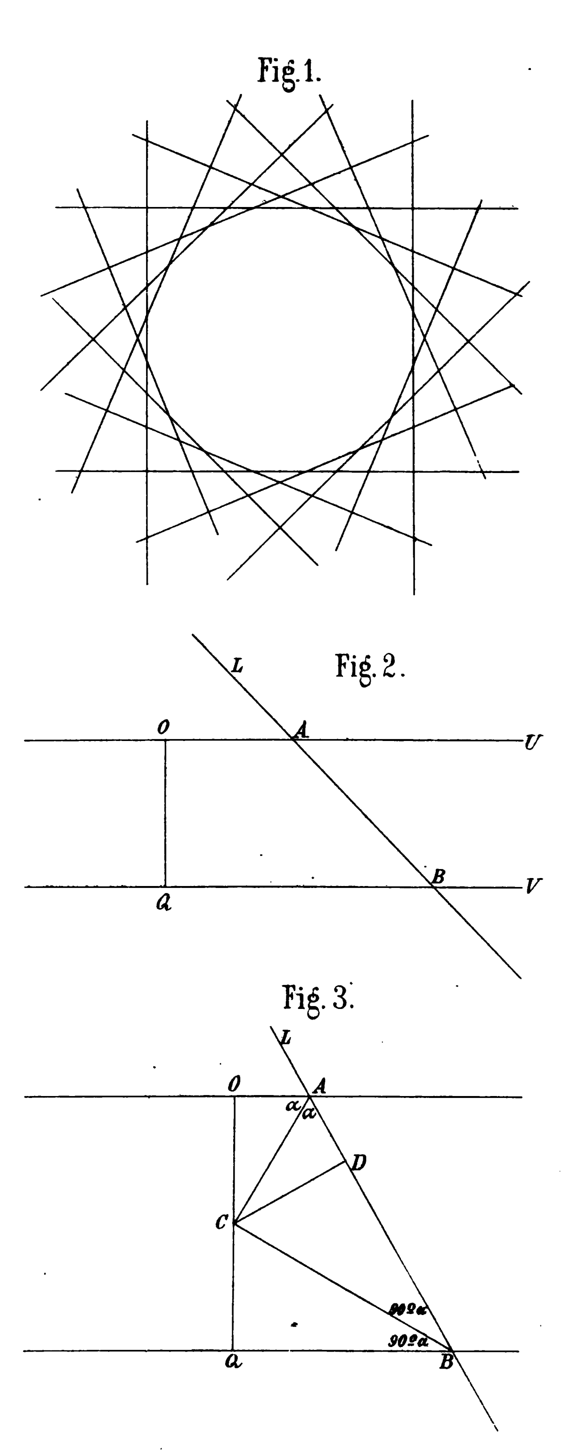
$$\left.\begin{array}{l} u' = ee' \dfrac{Au + Bv + C}{-(C-F)(u-v) + e^2(A-D)}, \\ v' = ee' \dfrac{Du + Ev + F}{-(C-F)(u-v) + e^2(A-D)}. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (52.)$$

Setzen wir $C = F$, so werden die Axen einfach parallel verschoben (§. 59), und dieser Fall scheint sich in den Beispielen als Hauptfall zu bewähren. Nehmen wir dagegen $A = D$, so sind die neuen Axen senkrecht zu den ursprünglichen. Allgemein ist der Winkel μ, den die neuen Axen mit den ursprünglichen bilden, durch die Gleichung zu finden:

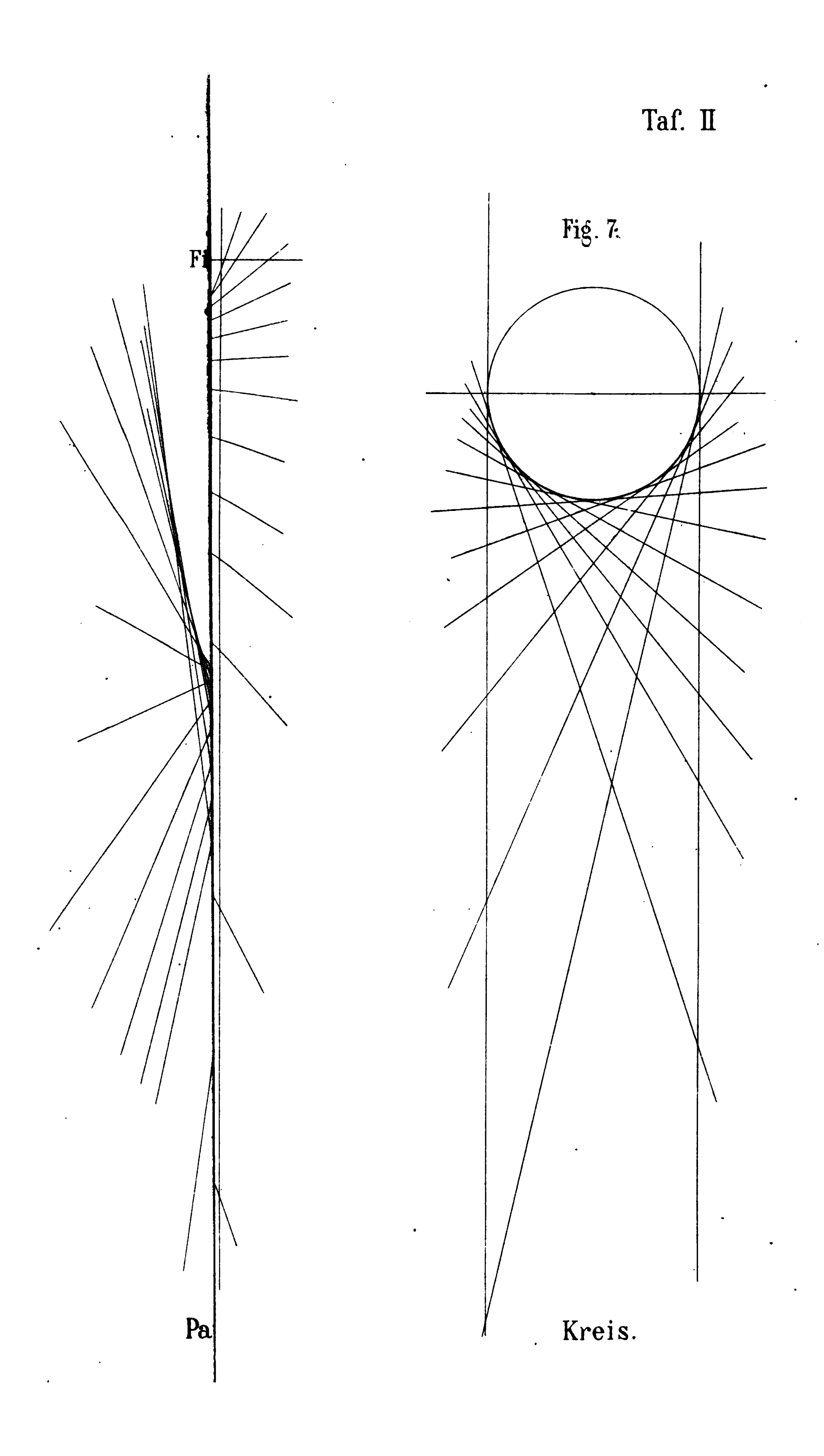
$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{e} \cdot \frac{C-F}{A-D}. \quad \ldots \ldots \quad (53.)$$

Sachregister.

Taf. I



Schwering, Liniencoord.


Fi
Fig. 7.
Pa
Kreis.





